Zbiory osiągalne i wektory Leviego na płaszczyźnie

Jacek Marchwicki
Politechnika Łódzka
marchewajaclaw@gmail.com

Autorzy: Szymon Głąb, Jacek Marchwicki

Zbiorem osiągalnym szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ nazywamy $A(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$, natomiast przez „sum range” rozumiemy $SR(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_\infty\}$, który na mocy twierdzenia Steinitza jest podprzestrzenią afiniczną, jeśli tylko rozważany szereg jest warunkowo zbieżny. Wiadomo, że $SR(x_n) \subset \overline{A(x_n)}$. Dla szeregów warunkowo zbieżnych na płaszczyźnie pokazaliśmy, że zbiór osiągalny może być między innymi:

- wykresem funkcji;
- zbiorem gęstym o pustym wnętrzu;
- zbiorem, który nie jest ani typu F_σ ani G_δ;
- zbiorem otwartym nie będącym płaszczyzną;

W pracy badamy szeregi warunkowo zbieżne na płaszczyźnie dla których $SR(x_n) = \mathbb{R}^2$ oraz podajemy warunki wystarczające na to, żeby $A(x_n) = \mathbb{R}^2$. Będziemy również rozważać podzbiór zbioru osiągalnego zdefiniowany następująco $A_{abs}(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|x_n\| < \infty\}$. Powiemy, że wektor $u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = 1$ jest wektorem Leviego dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ gdy dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy, że $\sum_{v_n \in S_\varepsilon(u)} \|v_n\| = \infty$, gdzie $S_\varepsilon(u) = \{v : \langle u, v\rangle \geqslant (1-\varepsilon)\|u\|\|v\|\}$. Wiadomo, że jeżeli $SR(x_n) = \mathbb{R}^2$ to na każdej domkniętej półsferze jednostkowej znajduje się wektor Leviego. Wykazaliśmy, że jeżeli szereg posiada przynajmniej trzy wektory Leviego to $A_{abs}(x_n) = \mathbb{R}^2$, więc tymbardziej $A(x_n) = \mathbb{R}^2$. Dla przypadku dwóch przeciwstawnych wektorów Leviego podaliśmy warunek wystarczający na to, żeby $A(x_n) = \mathbb{R}^2$. Podane zostaną liczne interesujące przykłady będące wnioskami z tez zawartych w pracy, między innymi szeregu dla którego $A(x_n) = \mathbb{R}^2$ i $A_{abs}(x_n) \neq \mathbb{R}^2$ czy też szeregu dla którego istnieje permutacja jego wyrazów σ taka, że $A(x_n) \neq A(x_{\sigma(n)})$.