Własności Steinhausa, własność Smitala i miary borelowskie

Małgorzata Filipczak
Uniwersytet Łódzki
malfil@math.uni.lodz.pl

Załóżmy, że $\langle X, +, \tau\rangle$ jest abelową grupą topologiczną. Mówimy, że para $(\mathcal{A}, \mathcal{I})$ złożona z algebry $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ i ideału $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ ma

- klasyczną własność Steinhausa, gdy $Int\,(A - A) \neq \emptyset$ dla dowolnego $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$;
- własność Steinhausa, gdy $Int\,(A - B) \neq \emptyset$ dla dowolnych $A, B \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$;
- rozszerzoną własność Steinhausa, gdy $Int\,(A - B) \neq \emptyset$ dla dowolnych $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ oraz $B \notin \mathcal{I}$;
- własność Smitala, jeśli dla dowolnego $A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{I}$ i zbioru gęstego D, $(A + D)^c \in \mathcal{I}$.

Wiadomo, że rozszerzona własność Steinhausa jest równoważna własności Smitala. Jeśli jednak ograniczymy się do rozważania zupełnych miar borelowskich na X oraz par złożonych ze zbiorów mierzalnych i zbiorów miary zero, to wszystkie rozważane wyżej pojęcia sa równoważne. Okazuje sie też, że jeśli miara μ jest singularna względem miary Haara, to istnieje zbiór A pełnej miary μ taki że $Int\,(A - A) = \emptyset$.