Małe zbiory typu Cantora

Katarzyna Chrząszcz
Politechnika Łódzka
katarzyna.chrzaszcz2@gmail.com

Oznaczmy przez $2^{<\mathbb{N}}$ (odpowiednio: $2^{\mathbb{N}}$) zbiór wszystkich skończonych (odpowiednio: nieskończonych) ciągów binarnych. Dla dowolnego $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, $i \in \{0,1\}$ oznaczmy przez $s\hat{\ }i$ przedłużenie ciągu s o wyraz i oraz przez $s|n$- obcięcie ciągu s do n początkowych wyrazów. Zdefiniujmy ciąg przedziałów domkniętych $\{I_s : s \in 2^{<\mathbb{N}}\}$ o następujących własnościach:

(i) $I_\emptyset = [0,1]$;

(ii) $\forall_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}\ \min I_{s\hat{\ }0} = \min I_s, \max I_{s\hat{\ }1} = \max I_s$;

(iii) $\forall_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}\ \forall_{i\in\{0,1\}}\ |I_{s\hat{\ }i}| = \frac{1}{3}\cdot |I_s|$.

Wówczas

$$\mathcal{C} := \bigcup_{s\in 2^{\mathbb{N}}} \bigcap_{n\in\omega} I_{s|n}$$

jest klasycznym zbiorem Cantora.

Podczas referatu przedstawione zostanie uogólnienie powyższej konstrukcji, które umożliwi uzyskanie zbioru Cantora:

- miary zero, który nie jest mikroskopijny;
- mikroskopijnego;
- o wymiarze Hausdorffa zero.