Hipergrupy i ich zastosowania

Żywilla Fechner
Instytut Matematyki Uniwersytetu Śląskiego

III Warsztaty z Analizy Rzeczywistej
Konopnica, 20 – 21. 05. 2017

Plan referatu

Algebra miar

Niech G będzie lokalnie zwartą grupą abelową Hausdorffa. Niech $M^b(G)$ oznacza przestrzeń Banacha wszystkich skończonych miar Radona na G. Niech dalej

$$M_d^b(G) := \left\{ \mu \in M^b(G) : \mu = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \delta_{g_k} \text{ gdzie } \sum_{k=1}^{\infty} |\beta_k| < \infty \right\}.$$

Splot dwóch miar Diraca jest zdefiniowany następująco

$$\delta_{g_1} * \delta_{g_2} := \delta_{g_1+g_2},$$

gdzie g_1, g_2 są elementami grupy G.

Rozszerzenie splotu na przestrzeń $M_d^b(G)$

Niech μ oraz μ' będą elementami $M_d^b(G)$. Jeżeli istnieje taka miara ρ w $M_d^b(G)$, że dla każdej funkcji $f: G \to \mathbb{C}$ znikającej w nieskończoności zachodzi

$$\int_G f(z)d\rho(z) = \int_G \int_G f(x+y)d\mu(x)d\mu'(y),$$

to miarę ρ nazywamy splotem miar μ oraz μ' i oznaczamy $\rho := \mu * \mu'$.

Problem: co stanie się, gdy G zastąpimy dowolną przestrzenią lokalnie zwartą Hausdorffa bez struktury algebraicznej? Jak zdefiniować

$$\delta_{g_1} * \delta_{g_2} := \delta_{g_1 \ldots g_2}?$$

Krótki wstęp do hipergrup

Niech K będzie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa, $\mathcal{M}_b(K)$ przestrzenią ograniczonych miar Radona na K. Niech dalej $\mathcal{M}^1(K)$ będzie zbiorem wszystkich miar probabilistycznych na K. Załóżmy, że

- H^* Dla wszystkich x, y z K, splot miar Diraca $\delta_x * \delta_y$ jest ciągłym odwzorowaniem liniowym z $K \times K$ w $M^1(K)$.
- $H^\vee$ Istnieje inwolucja $^\vee : K \to K$ będąca jednocześnie homeomorfizmem.
- H^e Istnieje ustalony element e w K nazywany identycznością.

Krótki wstęp do hipergrup

Utożsamiając x **z** δ_x splot ma jedyne rozszerzenie do ciągłego odwzorowania dwuliniowego z $M(K) \times M(K)$ do $M(K)$.

Hipergrupą nazywamy czwórkę $(K, *, \check{}, e)$ spełniającą warunki

- $H1$ $\delta_x * (\delta_y * \delta_z) = (\delta_x * \delta_y) * \delta_z$,
- $H2$ $(\delta_x * \delta_y)\check{} = \delta_{\check{y}} * \delta_{\check{x}}$,
- $H3$ $\delta_x * \delta_e = \delta_e * \delta_x = \delta_x$,
- $H4$ $e \in \mathrm{supp}(\delta_x * \delta_{\check{y}}) \leftrightarrow x = y$,
- $H5$ $\mathrm{supp}(\delta_x * \delta_y)$ jest zwarty,
- $H6$ Odwzorowanie $K \times K \ni (x, y) \mapsto \mathrm{supp}(\delta_x * \delta_y) \in \mathcal{C}(K)$ jest ciągłe.
  Przestrzeń wartości rozważamy z topologią Michaela.

Hipergrupa dwuelementowa

Niech $K = \{0, 1\}$, $0 < \theta \leq 1$, $e = 0$, $x^{\vee} = x$.

$$\delta_0 * \delta_0 = \delta_0, \quad \delta_0 * \delta_1 = \delta_1 * \delta_0 = \delta_1$$
$$\delta_1 * \delta_1 = \theta\delta_0 + (1 - \theta)\delta_1$$

$D(\theta)$ jest grupą, jeżeli $\theta = 1$ oraz nie jest grupą, gdy $\theta \neq 1$.

Co oznacza $h(x * y)$?

Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(K, \mathcal{B}(K), \delta_x * \delta_y)$. Dowolna funkcja ciągła $f : K \to \mathbb{C}$ może być rozważana jako zmienna losowa. Wartość oczekiwana f względem δ_x wynosi

$$E_X(f) = \int_K f d\delta_x = f(x)$$

Ogólnej, dla dowolnej takiej miary μ, że f jest μ-całkowalna zachodzi

$$f(\mu) = E_\mu(f) = \int_K f d\mu.$$

W szczególności,

$$f(x * y) := f(\delta_x * \delta_y) = \int_K f(t) d(\delta_x * \delta_y)(t), \quad x, y \in K.$$

Funkcje addytywne

Ciągłą funkcję $a\colon K \to \mathbb{C}$ nazywamy addytywną, jeżeli

$$\int_K a(t)d(\delta_x * \delta_y)(t) = a(x) + a(y), \quad x, y \in K.$$

W notacji grupowej

$$a(x * y) = a(x) + a(y), \quad x, y \in K.$$

Ponadto, $a(e) = 0$.

Funkcje wykładnicze i charaktery

Ciągłą funkcję $m\colon K \to \mathbb{C}$ nazywamy wykładniczą, jeżeli

$$\int_K m(t)d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x)m(y), \quad x, y \in K.$$

W notacji grupowej

$$m(x * y) = m(x)m(y), \quad x, y \in K.$$

Ponadto, $m(e) = 1$. Jeśli dodatkowo

$$m(x^\vee) = \overline{m(x)}, \quad x \in K,$$

to m nazywamy semi-charakterem.
Ograniczony semi-charakter nazywamy charakterem.

Funkcje wykładnicze na $D(\theta)$

Niech $K = \{0, 1\}$, $0 < \theta \leq 1$, $e = 0$, $x^\vee = x$. Wtedy

$$m(x * y) = \int_{\{0,1\}} m(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = m(x)m(y)$$

Zawsze $m(0) = 1$. Rozważmy $x = y = 1$:

$$\begin{aligned} m(1 * 1) &= \int_{\{0,1\}} m(t) d(\delta_1 * \delta_1)(t) \\ &= \theta m(0) + (1-\theta)m(1) = \theta + (1-\theta)m(1) \\ &= m(1)m(1) \end{aligned}$$

Stąd albo $m \equiv 1$ albo $m(0) = 1$ oraz $m(1) = -\theta$.

$\delta_0 * \delta_0 = \delta_0, \quad \delta_0 * \delta_1 = \delta_1 * \delta_0 = \delta_1 \quad \delta_1 * \delta_1 = \theta\delta_0 + (1-\theta)\delta_1$

Operator translacji i miara Haara

Niech $y \in K$. Operator translacji $\tau_y \colon C(K) \to C(K)$ dany jest wzorem

$$\tau_y f(x) := \int_K fd(\delta_x * \delta_y), \quad f \in C(K), \quad y \in K.$$

Mówimy, że dodatnia miara Radona jest lewostronnie niezmienniczą miarą Haara, jeżeli

$$\int_K \tau_y f(x) d\omega(x) = \int_K f(x) d\omega(x), \quad y \in K.$$

Istnienie i przykład miary Haara

1. Każda przemienna hipergrupa dopuszcza miarę Haara.
2. Każda zwarta hipergrupa dopuszcza miarę Haara, która jest jednoznaczna z dokładnością do stałej.

Na hipergrupie $D(\theta)$ całkowanie względem znormalizowanej miary Haara wyraża się wzorem

$$\int_K f d\omega = \frac{\theta}{1+\theta} f(0) + \frac{1}{1+\theta} f(1)$$

dla dowolnej funkcji $f: K \to \mathbb{C}$.

Funkcje m-sinusowe

Niech $m\colon K \to \mathbb{C}$ będzie funkcją wykładniczą i niech $f : K \to \mathbb{C}$ będzie funkcja ciągłą. Funkcja f jest funkcją m-sinusową, jeżeli

$$f(x * y) = f(x)m(y) + f(y)m(x), \quad x, y \in K.$$

$$\int_K f(t)d(\delta_x * \delta_y)(t) = f(x)m(y) + f(y)m(x), \quad x, y \in K.$$

Każda funkcja m-sinusowa na $D(\theta)$ jest identycznie równa zero.

Możliwe zastosowania funkcji m sinusowych

- twierdzenia graniczne dla błądzenia losowego
- synteza i analiza spektralna
- **funkcje tworzące momenty wyższych rzędów**

Funkcje tworzące momenty wyższych rzędów

Niech $N \in \mathbb{N}$. Funkcja $\varphi\colon K \to \mathbb{C}$ jest funkcją generującą momenty rzędu N, jeżeli istnieją takie funkcje ciągłe $\varphi_k\colon K \to \mathbb{C}$ $(k = 0, \dots, N)$, że $\varphi_0 = 1$, $\varphi_N = \varphi$ oraz dla $k = 0, \dots, N$ dla każdych $x, y \in K$ zachodzi

$$\int_K \varphi(t) d(\delta_x * \delta_y)(t) = \varphi_k(x * y) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \varphi_j(x) \varphi_{k-j}(y).$$

W zastosowaniach rozważa się najczęściej $N = 2$ oraz funkcje o wartościach rzeczywistych z dodatkowym warunkiem

$$\varphi_1^2(x) \leq \varphi_2(x).$$

Uogólniona wartość oczekiwana i wariancja

Otrzymujemy zależności

$$\varphi_1(x * y) = \varphi_1(x) + \varphi_1(y)$$

oraz

$$\varphi_2(x * y) = \varphi_2(x) + 2\varphi_1(x)\varphi_1(y) + \varphi_2(y)$$

Jeżeli φ_2 jest całkowalna względem $\mu \in \mathcal{M}_1$, to wielkość

$$\mathbb{E}(\mu) = \int_K \varphi_1 d\mu$$

nazywamy uogólniona wartością oczekiwaną, a wielkość

$$\mathbb{V}(\mu) = \int_K \varphi_2 d\mu - \left[\int_K \varphi_1 d\mu\right]^2$$

uogólnioną wariancją.

Własności uogólnionych momentów

Jeżeli φ_2 jest całkowalna względem $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(K)$, to

$$\mathbb{E}(\mu * \nu) = \mathbb{E}(\mu) + \mathbb{E}(\nu)$$
$$\mathbb{V}(\mu * \nu) = \mathbb{V}(\mu) + \mathbb{V}(\nu)$$

Pomijając założenie $\varphi_0 = 1$ i rozważając dowolną funkcję wykładniczą φ_0 otrzymujemy tzw. uogólnione funkcje momentu. W szczególności, φ_1 spełnia

$$\varphi_1(x * y) = \varphi_1(x)\varphi_0(y) + \varphi_1(y)\varphi_0(x).$$

Czyli φ_1 jest funkcją φ_0 - sinusową.

Problemy i zastosowania

- Postać funkcji m-sinusowych na konkretnych hipergrupach.
- Różnice pomiędzy przypadkiem przemiennym i nieprzemiennym.
- Ogólne metody wyznaczania funkcji momentu.

Literatura

[1] W. R. Bloom and H. Heyer, *Harmonic analysis of probability measures on hypergroups*, de Gruyter Studies in Mathematics, vol. 20, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1995.

[2] Ż. F. and László Székelyhidi, *Functional equations on double coset hypergroups*, Annals of Functional Analysis (2017).

[3] E. Hewitt and K.A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. I*, Fundamental Principles of Mathematical Sciences vol. 115, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[4] László Székelyhidi, *Functional Equations on Hypergroups*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., New Jersey, London, 2012.

Dziękuję za uwagę