Zbiory punktów zbieżności dla ciągów pewnych funkcji pierwszej klasy Baire'a.

Tomasz Natkaniec, **Waldemar Sieg**

Niech X będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\vec{f} = (f_n)_n$ będzie ciągiem funkcji rzeczywistych określonych na X. Dla ciągu $\vec{f}$ definiujemy zbiory:

Z1 $L\left(\vec{f}\right) = \{x \in X\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ istnieje i jest skończona$\}$;

Z2 $L_{+\infty}\left(\vec{f}\right) = \{x \in X\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$;

Z3 $L_{-\infty}\left(\vec{f}\right) = \{x \in X\colon \lim_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty\}$.

Postać tych dla ciągów funkcji ciągłych $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ badał w latach 1961-1963 Profesor Lipiński [3, 4]. W 1975 Lunina [5] scharakteryzowała powyższe zbiory (oraz cztery inne - wyczerpując wszystkie możliwości dla wartości granicy dolnej oraz górnej ciągu $(f_n)_n$ przy $n \to \infty$) dla ciągu $\vec{f}$ złożonego z funkcji ciągłych określonych na dowolnej przestrzeni metrycznej X. Punktem wyjścia dla wyżej opisanych badań było klasyczne twierdzenie udowodnione niezależnie przez Hahn'a [1] i Sierpińskiego [7] które mówi, że podzbiór A przestrzeni polskiej X jest typu $F_{\sigma\delta}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ złożony z funkcji ciągłych i taki, że $A = L\left(\vec{f}\right)$ (patrz, np. [2, 23.18]).

W trakcie referatu przedstawię uzyskane przez nas wyniki związane z opisem zbiorów punktów zbieżności oraz rozbieżności dla ciągów funkcji o domkniętym wykresie oraz ciągów funkcji z klasy B_1^* określonych na przestrzeni metrycznej X.

Literatura

[1] H. Hahn, *Uber die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionfolge*, Arch. der Math. und Physik **28** (1919), 34–45.

[2] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995.

[3] J.S. Lipiński, *Convergence to infinity of a sequence of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **140** (1961), 752–754 (in Russian).

[4] J.S. Lipiński, *Sets of points of convergence to infinity of a sequence of continuous functions*, Fund. Math., **51** (1962/1963), 35–43 (in Russian).

[5] M.A. Lunina, *Convergence and divergence sets of sequences of real continuous functions on a metric space*, Math. Notes **17**, (1975), 120–126.

[6] T. Natkaniec, J. Wesołowska, *Sets of ideal convergence of sequences of quasi-continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **423** (2015), 924–939.

[7] W. Sierpiński, *Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues*, Fund. Math. **2** (1921), 41–49.