Łuzin i Sierpiński wśród drzew.

Marcin Michalski

Drzewo T na ω nazywamy

- drzewem Sacksa lub doskonałym, oznaczenie: $T \in \mathbb{S}$, jeśli dla każdego węzła $\sigma \in T$ istnieje $\tau \in T$, dla którego $\sigma \subseteq \tau$ oraz $|succ(\tau)| \geqslant 2$;
- drzewem Millera lub superdoskonałym, oznaczenie: $T \in \mathbb{M}$, jeśli dla każdego węzła $\sigma \in T$ istnieje $\tau \in T$, dla którego $\sigma \subseteq \tau$ oraz $|succ(\tau)| = \aleph_0$;
- drzewem Lavera, oznaczenie: $T \in \mathbb{L}$, jeśli dla każdego węzła $\tau \supseteq stem(T)$ zachodzi $|succ(\tau)| = \aleph_0$;
- zupełnym drzewem Lavera, oznaczenie: $T \in \mathbb{CL}$, jeśli T jest drzewem Lavera oraz $stem(T) = \emptyset$;

Niech $\mathbb{T}$ będzie rodziną drzew. Wtedy definiujemy *ideał drzewiasty* t_0 związany z rodziną drzew $\mathbb{T}$ w następujący sposób:

Definicja 1 *Niech $A \subseteq \omega^\omega$. Wtedy*

$$A \in t_0 \Leftrightarrow (\forall T \in \mathbb{T})(\exists T' \subseteq T, T' \in \mathbb{T})([T'] \cap A = \emptyset).$$

Klasycznym przykładem ideału drzewiastego jest ideał Marczewskiego s_0. Przypomnijmy pojęcie zbioru $\mathcal{I}$-Łuzina.

Definicja 2 *Niech X będzie przestrzenią polską, a $\mathcal{I}$ ideałem. Wtedy zbiór $L \subseteq X$ nazywamy zbiorem $\mathcal{I}$-Łuzina, jeśli $|L \cap A| < |L|$ dla każdego $A \in \mathcal{I}$.*

Dla ideału zbiorów miary zero $\mathcal{N}$ i zbiorów I kategorii $\mathcal{M}$ zbiory $\mathcal{M}$-Łuzina będziemy nazywać uogólnionymi zbiorami Łuzina, a zbiory $\mathcal{N}$-Łuzina uogólnionymi zbiorami Sierpińskiego.

Będziemy rozpatrywać zbiory $\mathcal{I}$-Łuzina w kontekście własności algebraicznych i ideałów drzewiastych. Będziemy działać na prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ z dodawaniem. Ponieważ $\mathbb{R}$ jest σ-zwarta, nie zawiera żadnego ciała drzewa Millera. Zmodyfikujemy nieco definicję ideału drzewiastego poprzez stwierdzenie, że $A \subseteq \mathbb{R}$ należy do t_0, jeśli $h^{-1}[A]$ należy t_0 w ω^ω, gdzie h jest homemorfizmem pomiędzy ω^ω, a podprzestrzenią liczb niewymiernych (por. [1] z podobną modyfikacją dla 2^ω). Używając subtelnej fuzji drzew Millera i Lavera udowodnimy następujący lemat:

Lemat 1 *Istnieje gęsty zbiór G typu G_δ taki, że dla każdego drzewa Millera (odp. Lavera lub zupełne Lavera) T istnieje poddrzewo Millera (odp. Lavera lub zupełne Lavera) $T' \subseteq T$, dla którego zachodzi $G + [T'] \in \mathcal{N}$.*

Użyjemy tego rezultatu do pokazania następującego twierdzenia (zob. [3], [2]).

Twierdzenie 1 *Niech $\mathfrak{c}$ będzie regularną liczbą kardynalną, a $t_0 \in \{s_0, m_0, l_0, cl_0\}$. Wtedy dla każdego uogólnionego zbioru Łuzina L i każdego uogólnionego zbioru Sierpińskiego S zachodzi $L + S \in t_0$.*

Literatura

[1] Kysiak M., Weiss T., Small subsets of the reals and tree forcing notions, Proceedings of American Mathematical Society, vol. 132, nr 1, pp. 251-259, 2003.

[2] Michalski M., Rałowski R., Żeberski Sz., Nonmeasurable sets and union with respect to tree ideals, arXiv:1712.05212 (2017)

[3] Michalski M., Żeberski Sz., Some properties of I-Luzin, Topology and its Applications, 189 (2015), pp. 122-135,