Zbiory Haar-małe i różniczkowalność

Adam Kwela

Jedne z klasycznych wyników dotyczących różniczkowalności funkcji ciągłych mówią, że zbiór funkcji, które są różniczkowalne w przynajmniej jednym punkcie jest pierwszej kategorii i Haar-null w przestrzeni $C([0,1])$.

Niedawno Banakh i in. wprowadzili pojęcie zbioru Haar-$\mathcal{I}$ dla rodziny $\mathcal{I}$ podzbiorów przestrzeni Cantora 2^ω: mówimy, że podzbiór A abelowej grupy polskiej X jest Haar-$\mathcal{I}$, jeśli istnieją zbiór borelowski $B \supseteq A$ i funkcja ciągła $f\colon 2^\omega \to X$ spełniająca $f^{-1}[B+x] \in \mathcal{I}$ dla każdego $x \in X$. Okazuje się, że jeśli $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem zbiorów miary zero na 2^ω, to w powyższej definicji otrzymujemy zbiory Haar-null.

Podczas referatu użyjemy zbiorów Haar-$\mathcal{I}$ do badania wielkości rodziny funkcji ciągłych różniczkowalnych na niepustym zbiorze miary zero (pierwszej kategorii), zbiorze miary dodatniej (drugiej kategorii) i zbiorze miary pełnej (rezydualnym). Ponadto, przyjrzymy się przypadkowi wielowymiarowemu, tzn. funkcjom różniczkowalnym z przestrzeni $C([0,1]^k)$.