Quasimetryki – krótka historia oszacowań pewnej stałej; twierdzenie Cantora dla ciągu zbiorów niedomkniętych i to, co z niego wynika.

Filip Turoboś

23-24 VI 2018
Konopnica

wyniki uzyskane we współpracy
z Katarzyną Chrząszcz,
i prof. Jackiem Jachymskim.

Podstawowe pojęcia

Przestrzeń quasimetryczna

Niech $X \neq \emptyset$ i $d : X \times X \to [0, +\infty)$ spełnia warunki

(Q1) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(Q2) $d(x, y) = d(y, x)$;

(Q3) $d(x, y) \leqslant K \cdot \max\{d(x, z), d(z, y)\}$,

gdzie $K > 1$ – stała, $x, y, z \in X$ – dowolne. Parę (X, d) nazywamy przestrzenią K-quasimetryczną.

Przestrzeń semimetryczna

Parę (X, d) spełniającą warunki (Q1), (Q2) nazywamy przestrzenią semimetryczną.

Początek historii – oszacowanie Frinka (1937)

A. H. Frink – *Distance functions and the metrization problem* – 1937

Niech (X, d) będzie przestrzenią quasimetryczną ze stałą $K \leqslant 2$. Wówczas istnieje taka metryka $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$, że

$$\rho(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant 4\rho(x, y).$$

Definicja metryki we wszystkich rozdziałach naszej historii:

$$\rho(x, y) := \inf \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i), \tag{1}$$

Początek historii – oszacowanie Frinka (1937)

A. H. Frink – *Distance functions and the metrization problem* – 1937

Niech (X, d) będzie przestrzenią quasimetryczną ze stałą $K \leqslant 2$. Wówczas istnieje taka metryka $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$, że

$$\rho(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant 4\rho(x, y).$$

Definicja metryki we wszystkich rozdziałach naszej historii:

$$\rho(x, y) := \inf \sum_{i=1}^{n} d(x_{i-1}, x_i), \tag{1}$$

Środek historii – oszacowanie Schroedera (2006)

V. Schroeder – *Quasi-metric and metric spaces* – 2006

Niech (X, d) będzie przestrzenią quasimetryczną ze stałą $K \leqslant 2$. Wówczas istnieje taka metryka $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$, że

$$\rho(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant 2K\rho(x, y).$$

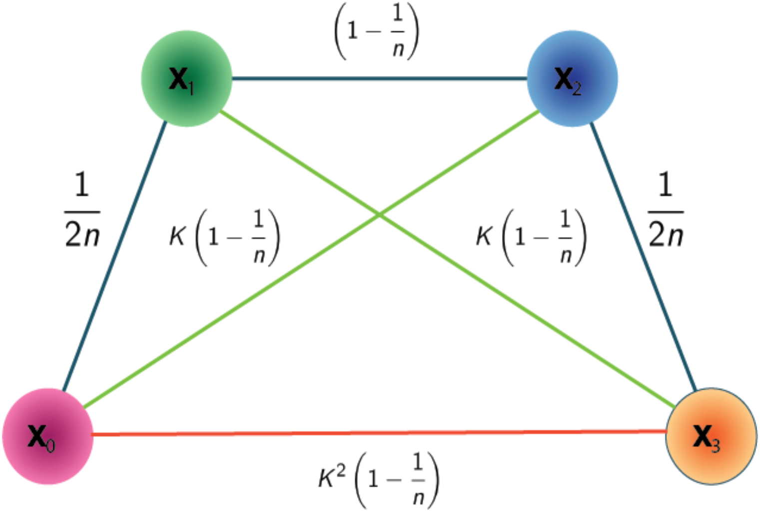
Koniec historii – oszacowanie optymalne 2018

K. Chrząszcz, J. Jachymski, FT – *Two refinements of Frink's metrization theorem and fixed point results for Lipschitzian mappings on quasimetric spaces* – 2018

Niech (X, d) będzie przestrzenią quasimetryczną ze stałą $K \leqslant 2$. Wówczas istnieje taka metryka $\rho : X \times X \to [0, +\infty)$, że

$$\rho(x, y) \leqslant d(x, y) \leqslant K^2 \rho(x, y).$$

Graficznie – przykład dowodzący optymalności.



Jak niepraktyczna może być charakteryzacja?

Charakteryzacja liczb $K \leqslant 2$.

Niech K będzie liczbą rzeczywistą, NWSR:

(i) $K \leqslant 2$;

(ii) dla dowolnej przestrzeni K-quasimetrycznej (X, d) istnieje metryka ρ taka, że dla pewnego $c \geqslant 1$,

$$\forall_{x,y \in X}\ \rho(x,y) \leqslant d(x,y) \leqslant c \cdot \rho(x,y);$$

(iii) dla dow. przestrzeni K-quasimetrycznej (X, d) zachodzi

$$\exists_{c>0} \forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{x_1,\ldots,x_n \in X}\, d(x_1, x_n) \leqslant c \cdot (d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n))\,;$$

(iv) dla dow. przestrzeni K-quasimetrycznej (X, d), funkcja $\rho_{\inf}$ zadana wzorem (1) jest metryką;

(v) dla dow. przestrzeni K-quasimetrycznej (X, d) posiadającej co najmniej dwa elementy, funkcja $\rho_{\inf}$ określona przez wzór (1) jest niezerowa, tj. istnieją $x_0, y_0 \in X$ takie, że $\rho_{\inf}(x_0, y_0) > 0$.

Twierdzenie Banacha w wersji quasimetrycznej

I. A. Bakthin – *The contraction mapping principle in almost metric spaces* – 1989

Niech (X,d) będzie zupełną przestrzenią semimetryczną, $T : X \to X$ będzie lipszycowska ze stałą $L(T) \in [0,1)$. Wówczas T ma dokładnie jeden punkt stały $x_* \in X$ i dla każdego $x \in X$ zachodzi $T^n x \to x_*$.

Nie da się go otrzymać z tw. Cantora. Dlaczego?
Istnieją przestrzenie (X,d) (nawet spełniająca c-złagodzoną nierówność wielokąta) i kontrakcje Banacha $T : X \to X$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$, zbiór punktów ε-stałych nie jest domknięty:

$$\mathrm{Fix}_\varepsilon T := \{x \in X : d(x,Tx) \leqslant \varepsilon\}$$

Twierdzenie Banacha w wersji quasimetrycznej

I. A. Bakthin – *The contraction mapping principle in almost metric spaces* – 1989

Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią semimetryczną, $T : X \to X$ będzie lipszycowska ze stałą $L(T) \in [0, 1)$. Wówczas T ma dokładnie jeden punkt stały $x_* \in X$ i dla każdego $x \in X$ zachodzi $T^n x \to x_*$.

Nie da się go otrzymać z tw. Cantora. Dlaczego?

Istnieją przestrzenie (X, d) (nawet spełniająca c-złagodzoną nierówność wielokąta) i kontrakcje Banacha $T : X \to X$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$, zbiór punktów ε-stałych nie jest domknięty:

$$\mathrm{Fix}_\varepsilon T := \{x \in X : d(x, Tx) \leqslant \varepsilon\}$$

Twierdzenie Banacha w wersji quasimetrycznej

I. A. Bakthin – *The contraction mapping principle in almost metric spaces* – 1989

Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią semimetryczną, $T : X \to X$ będzie lipszycowska ze stałą $L(T) \in [0, 1)$. Wówczas T ma dokładnie jeden punkt stały $x_* \in X$ i dla każdego $x \in X$ zachodzi $T^n x \to x_*$.

Nie da się go otrzymać z tw. Cantora. Dlaczego?
Istnieją przestrzenie (X, d) (nawet spełniająca c-złagodzoną nierówność wielokąta) i kontrakcje Banacha $T : X \to X$ takie, że dla każdego $\varepsilon > 0$, zbiór punktów ε-stałych nie jest domknięty:

$$\mathrm{Fix}_\varepsilon T := \{x \in X : d(x, Tx) \leqslant \varepsilon\}$$

Stosowna wersja tw. Cantora

Uogólnione tw. Cantora

Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią semimetryczną spełniającą warunek

$$d(x_n, y_n) \to 0 \ \wedge \ d(y_n, z_n) \to 0 \implies d(x_n, z_n) \to 0$$

dla dowolnych ciągów $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ elementów X. Niech $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ będzie zstępującym ciągiem niepustych podzbiorów X takich, że $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$. Załóżmy, że ciąg (A_n) zawiera podciąg (A_{k_n}) taki, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, $\overline{A}_{k_n} \subset A_n$. Wówczas $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x_*\}$ dla pewnego $x_* \in X$.

Rozszerzenie tw. Bakthina

Niech (X,d) będzie zupełną przestrzenią K-quasimetryczną (spełnia ona warunek

$$\forall_{x,y,z\in X} d(x,y) \leqslant K\left(d(x,z)+d(z,y)\right).$$

ze stałą $K \geqslant 1$). Niech odwzorowanie $T : X \to X$ będzie lipszycowskie ze stałą $\alpha := L(T) < 1$, i niech $q \in \mathbb{N}$ będzie stałą taką, że $\alpha^q < \frac{1}{K^2}$. Wówczas T ma dokładnie jeden punkt stały $x_* \in X$. Ponadto dla dowolnego ciągu (x_n), jeżeli $d(x_n, Tx_n) \to 0$, to wówczas $x_n \to x_*$ oraz

a) jeżeli $\alpha \neq \frac{1}{K}$, to

$$d(x_n,x_*) \leqslant d(x_n,Tx_n)\frac{K}{1-\alpha^q K}\left(K\cdot\frac{1-\alpha^{q-1}K^{q-1}}{1-\alpha K}+\alpha^{q-1}K^{q-1}\right);$$

b) jeżeli $\alpha = \frac{1}{K}$, to

$$d(x_n,x_*) \leqslant d(x_n,Tx_n)\frac{K}{1-\alpha^{q-1}}\left(K(q-1)+1\right).$$

Oszacowania na odległość od n-tej iteraty

W szczególności, gdy $x_0 \in X$, $T^n x_0 \to x_*$ oraz

a) jeżeli $\alpha \neq \frac{1}{K}$, to wówczas

$$d(T^n x_0, x_*) \leqslant d(x_0, Tx_0)\frac{\alpha^n K}{1-\alpha^q K} \cdot \left(K\frac{1-\alpha^{q-1}K^{q-1}}{1-\alpha K} + \alpha^{q-1}K^{q-1}\right);$$

b) jeżeli $\alpha = \frac{1}{K}$, to wówczas

$$d(T^n x_0, x_*) \leqslant d(x_0, Tx_0)\frac{\alpha^{n-1}}{1-\alpha^{q-1}} \cdot (K(q-1)+1)\,.$$

Dalsze plany...

- Adaptacja algorytmów działających w przestrzeniach metrycznych:
  - Problem komiwojażera;
  - Drzewa metryczne;
  - Inne...

Koniec