Filip Strobin

O topologiach generowanych przez operator $\mathcal{S}$-gęstości

(wspólnie z T. Banakhem i R. Wiertelak)

Instytut Matematyki Politechniki Łódzkiej

Definicja

Powiemy, że $x \in \mathbb{R}$ jest *punktem gęstości* zbioru $A \in \mathcal{L}_1$ (tj. mierzalnego podzbioru $\mathbb{R}$), jeżeli

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\lambda_1(A \cap [x-h, x+h])}{2h} = 1.$$

Przez $\Phi_d(A)$ oznaczmy zbiór punktów gęstości A, a przez $\mathcal{T}_d$ - rodzinę mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}$ takich, że $A \subset \Phi_d(A)$.

Twierdzenie

Operator $\Phi_d : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ jest *operatorem dolnej gęstości*, tj. ma następujące własności:

1) $\Phi_d(\emptyset) = \emptyset, \quad \Phi_d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
2) jeżeli $\lambda_1(A \triangle B) = 0$, to $\Phi_d(A) = \Phi_d(B)$;
3) $\Phi_d(A \cap B) = \Phi_d(A) \cap \Phi_d(B)$;
4) $\lambda_1(A \triangle \Phi_d(A)) = 0$.

W szczególności, rodzina $\mathcal{T}_d$ jest topologią (zwaną *topologią gęstości*).

Definicja

Powiemy, że $x \in \mathbb{R}$ jest *punktem gęstości* zbioru $A \in \mathcal{L}_1$ (tj. mierzalnego podzbioru $\mathbb{R}$), jeżeli

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda_1(A \cap [x-h, x+h])}{2h} = 1.$$

Przez $\Phi_d(A)$ oznaczmy zbiór punktów gęstości A, a przez $\mathcal{T}_d$ - rodzinę mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}$ takich, że $A \subset \Phi_d(A)$.

Twierdzenie

Operator $\Phi_d : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ jest *operatorem dolnej gęstości*, tj. ma następujące własności:

1) $\Phi_d(\emptyset) = \emptyset, \quad \Phi_d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
2) jeżeli $\lambda_1(A \triangle B) = 0$, to $\Phi_d(A) = \Phi_d(B)$;
3) $\Phi_d(A \cap B) = \Phi_d(A) \cap \Phi_d(B)$;
4) $\lambda_1(A \triangle \Phi_d(A)) = 0$.

W szczególności, rodzina $\mathcal{T}_d$ jest topologią (zwaną *topologią gęstości*).

Definicja

Powiemy, że $x \in \mathbb{R}$ jest *punktem gęstości* zbioru $A \in \mathcal{L}_1$ (tj. mierzalnego podzbioru $\mathbb{R}$), jeżeli

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\lambda_1(A \cap [x-h, x+h])}{2h} = 1.$$

Przez $\Phi_d(A)$ oznaczmy zbiór punktów gęstości A, a przez $\mathcal{T}_d$ - rodzinę mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}$ takich, że $A \subset \Phi_d(A)$.

Twierdzenie

Operator $\Phi_d : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ jest *operatorem dolnej gęstości*, tj. ma następujące własności:

1) $\Phi_d(\emptyset) = \emptyset, \quad \Phi_d(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
2) jeżeli $\lambda_1(A \triangle B) = 0$, to $\Phi_d(A) = \Phi_d(B)$;
3) $\Phi_d(A \cap B) = \Phi_d(A) \cap \Phi_d(B)$;
4) $\lambda_1(A \triangle \Phi_d(A)) = 0$.

W szczególności, rodzina $\mathcal{T}_d$ jest topologią (zwaną *topologią gęstości*).

Definicja

Niech $\mathcal{S} = (S_n) \in \mathbb{S}$, tj. $\mathcal{S}$ jest zbieżnym do 0 ciągiem mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}$ o dodatnich miarach. Powiemy, że $x \in \mathbb{R}$ jest *punktem $\mathcal{S}$-gęstości* zbioru $A \in \mathcal{L}_1$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1(A \cap (x + S_n))}{\lambda(S_n)} = 1.$$

Przez $\Phi_{\mathcal{S}}(A)$ oznaczmy zbiór punktów $\mathcal{S}$-gęstości A, a przez $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ - rodzinę mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}$ takich, że $A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$.

Twierdzenie (M. Filipczak, J. Hejduk, F.S., R. Wiertelak)

Operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ ma następujące własności:

1) $\Phi_{\mathcal{S}}(\emptyset) = \emptyset, \quad \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
2) Jeżeli $\lambda_1(A \triangle B) = 0$, to $\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}}(B)$;
3) $\Phi_{\mathcal{S}}(A \cap B) = \Phi_{\mathcal{S}}(A) \cap \Phi_{\mathcal{S}}(B)$.

Co więcej, przy pewnych dodatkowych założeniach o $\mathcal{S}$, zachodzi:

4') $\lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = 0$,

więc $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest *operatorem prawie dolnej gęstości* i rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią (zwaną *topologią $\mathcal{S}$-gęstości*).

Definicja

Niech $\mathcal{S} = (S_n) \in \mathbb{S}$, tj. $\mathcal{S}$ jest zbieżnym do 0 ciągiem mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}$ o dodatnich miarach. Powiemy, że $x \in \mathbb{R}$ jest *punktem $\mathcal{S}$-gęstości* zbioru $A \in \mathcal{L}_1$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1(A \cap (x + S_n))}{\lambda(S_n)} = 1.$$

Przez $\Phi_{\mathcal{S}}(A)$ oznaczmy zbiór punktów $\mathcal{S}$-gęstości A, a przez $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ - rodzinę mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}$ takich, że $A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$.

Twierdzenie (M. Filipczak, J. Hejduk, F.S., R. Wiertelak)

Operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ ma następujące własności:

1) $\Phi_{\mathcal{S}}(\emptyset) = \emptyset, \quad \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
2) Jeżeli $\lambda_1(A \triangle B) = 0$, to $\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}}(B)$;
3) $\Phi_{\mathcal{S}}(A \cap B) = \Phi_{\mathcal{S}}(A) \cap \Phi_{\mathcal{S}}(B)$.

Co więcej, przy pewnych dodatkowych założeniach o $\mathcal{S}$, zachodzi:

4') $\lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = 0$,

więc $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest *operatorem prawie dolnej gęstości* i rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią (zwaną *topologią $\mathcal{S}$-gęstości*).

Definicja

Niech $\mathcal{S} = (S_n) \in \mathbb{S}$, tj. $\mathcal{S}$ jest zbieżnym do 0 ciągiem mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}$ o dodatnich miarach. Powiemy, że $x \in \mathbb{R}$ jest *punktem $\mathcal{S}$-gęstości* zbioru $A \in \mathcal{L}_1$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_1(A \cap (x + S_n))}{\lambda(S_n)} = 1.$$

Przez $\Phi_{\mathcal{S}}(A)$ oznaczmy zbiór punktów $\mathcal{S}$-gęstości A, a przez $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ - rodzinę mierzalnych podzbiorów $\mathbb{R}$ takich, że $A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$.

Twierdzenie (M. Filipczak, J. Hejduk, F.S., R. Wiertelak)

Operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ ma następujące własności:

1) $\Phi_{\mathcal{S}}(\emptyset) = \emptyset, \quad \Phi_{\mathcal{S}}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$;
2) Jeżeli $\lambda_1(A \triangle B) = 0$, to $\Phi_{\mathcal{S}}(A) = \Phi_{\mathcal{S}}(B)$;
3) $\Phi_{\mathcal{S}}(A \cap B) = \Phi_{\mathcal{S}}(A) \cap \Phi_{\mathcal{S}}(B)$.

Co więcej, przy pewnych dodatkowych założeniach o $\mathcal{S}$, zachodzi:

4') $\lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = 0$,

więc $\Phi_{\mathcal{S}}$ jest *operatorem prawie dolnej gęstości* i rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią (zwaną *topologią $\mathcal{S}$-gęstości*).

Niech G będzie zwartą grupą topologiczną a λ miarą Haara na G, tj. jedyną borelowską miarą na G taką, że

(i) λ jest lewostronnie niezmiennicza, tj. $\lambda(xA) = \lambda(A)$;

(ii) λ jest regularna;

(iii) $\lambda(G) = 1$;

(iv) $\lambda(U) > 0$ dla każdego niepustego i otwartego U.

Tym samym symbolem λ oznaczmy uzupełnienie miary Haara a symbolem $\mathcal{L}$ - odpowiednie rozszerzenie σ-ciała zbiorów borelowskich. Miara λ również spełnia warunki $(i) - (iv)$.

Przez $\mathbb{S}_G$ oznaczmy rodzinę ciągów $\mathcal{S} = (S_n)$ mierzalnych podzbiorów G takich, że

(a) $\lambda(S_n) > 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;

(b) dla dowolnego otoczenia $U \ni 0$, istnieje n_0 taka, że $S_n \subset U$ dla $n \geq n_0$.

Niech G będzie zwartą grupą topologiczną a λ miarą Haara na G, tj. jedyną borelowską miarą na G taką, że

(i) λ jest lewostronnie niezmiennicza, tj. $\lambda(xA) = \lambda(A)$;

(ii) λ jest regularna;

(iii) $\lambda(G) = 1$;

(iv) $\lambda(U) > 0$ dla każdego niepustego i otwartego U.

Tym samym symbolem λ oznaczmy uzupełnienie miary Haara a symbolem $\mathcal{L}$ - odpowiednie rozszerzenie σ-ciała zbiorów borelowskich. Miara λ również spełnia warunki $(i) - (iv)$.

Przez $\mathbb{S}_G$ oznaczmy rodzinę ciągów $\mathcal{S} = (S_n)$ mierzalnych podzbiorów G takich, że

(a) $\lambda(S_n) > 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;

(b) dla dowolnego otoczenia $U \ni 0$, istnieje n_0 taka, że $S_n \subset U$ dla $n \geq n_0$.

Niech G będzie zwartą grupą topologiczną a λ miarą Haara na G, tj. jedyną borelowską miarą na G taką, że

(i) λ jest lewostronnie niezmiennicza, tj. $\lambda(xA) = \lambda(A)$;

(ii) λ jest regularna;

(iii) $\lambda(G) = 1$;

(iv) $\lambda(U) > 0$ dla każdego niepustego i otwartego U.

Tym samym symbolem λ oznaczmy uzupełnienie miary Haara a symbolem $\mathcal{L}$ - odpowiednie rozszerzenie σ-ciała zbiorów borelowskich. Miara λ również spełnia warunki $(i) - (iv)$.

Przez $\mathbb{S}_G$ oznaczmy rodzinę ciągów $\mathcal{S} = (S_n)$ mierzalnych podzbiorów G takich, że

(a) $\lambda(S_n) > 0$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$;

(b) dla dowolnego otoczenia $U \ni 0$, istnieje n_0 taka, że $S_n \subset U$ dla $n \geq n_0$.

Definicja

Niech $\mathcal{S} = (S_n) \in \mathbb{S}_G$. Powiemy, że $x \in G$ jest *punktem $\mathcal{S}$-gęstości* zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap (xS_n))}{\lambda(S_n)} = 1.$$

Przez $\Phi_{\mathcal{S}}(A)$ oznaczmy zbiór punktów $\mathcal{S}$-gęstości A, a przez $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ - rodzinę mierzalnych podzbiorów G takich, że $A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$.

Twierdzenie (T. Banakh, F.S, R. Wiertelak)

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_G$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ oraz jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

Wniosek

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

Definicja

Niech $\mathcal{S} = (S_n) \in \mathbb{S}_G$. Powiemy, że $x \in G$ jest *punktem $\mathcal{S}$-gęstości* zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap (xS_n))}{\lambda(S_n)} = 1.$$

Przez $\Phi_{\mathcal{S}}(A)$ oznaczmy zbiór punktów $\mathcal{S}$-gęstości A, a przez $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ - rodzinę mierzalnych podzbiorów G takich, że $A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$.

Twierdzenie (T. Banakh, F.S, R. Wiertelak)

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_G$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ oraz jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

Wniosek

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

Definicja

Niech $\mathcal{S} = (S_n) \in \mathbb{S}_G$. Powiemy, że $x \in G$ jest *punktem $\mathcal{S}$-gęstości* zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeżeli

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(A \cap (xS_n))}{\lambda(S_n)} = 1.$$

Przez $\Phi_{\mathcal{S}}(A)$ oznaczmy zbiór punktów $\mathcal{S}$-gęstości A, a przez $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ - rodzinę mierzalnych podzbiorów G takich, że $A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$.

Twierdzenie (T. Banakh, F.S, R. Wiertelak)

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_G$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ oraz jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

Wniosek

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

Definicja

Niech $\mathcal{S} = (S_n) \in \mathbb{S}_G$. Powiemy, że $x \in G$ jest *punktem $\mathcal{S}$-gęstości* zbioru $A \in \mathcal{L}$, jeżeli

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lambda(A \cap (xS_n))}{\lambda(S_n)} = 1.$$

Przez $\Phi_{\mathcal{S}}(A)$ oznaczmy zbiór punktów $\mathcal{S}$-gęstości A, a przez $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ - rodzinę mierzalnych podzbiorów G takich, że $A \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A)$.

Twierdzenie (T. Banakh, F.S, R. Wiertelak)

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_G$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ oraz jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

Wniosek

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

Wniosek

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

dowód

Dowodu wymaga tylko punkt:
4') $\mathcal{L}(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = 0$.

Załóżmy najpierw, że A jest ograniczony. Możemy założyć, że $A \subset [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Ponieważ miara Lebesgue'a na $[0,1)$ pokrywa się z rozszerzeniem miary Haara na grupie $[0,1)$ z dodwaniem modulo 1, więc $\lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = 0$.

Jeżeli A jest nieograniczony, to

$$\lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A \cap [-n,n]) \setminus A) \leq$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A \cap [-n,n]) \setminus (A \cap [-n,n])) = 0.$$

Wniosek

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_1$ jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

dowód

Dowodu wymaga tylko punkt:
4') $\mathcal{L}(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = 0$.

Załóżmy najpierw, że A jest ograniczony. Możemy założyć, że $A \subset [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$. Ponieważ miara Lebesgue'a na $[0,1)$ pokrywa się z rozszerzeniem miary Haara na grupie $[0,1)$ z dodwaniem modulo 1, więc $\lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = 0$.

Jeżeli A jest nieograniczony, to

$$\lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A \cap [-n,n]) \setminus A) \leq$$

$$\leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_1(\Phi_{\mathcal{S}}(A \cap [-n,n]) \setminus (A \cap [-n,n])) = 0.$$

Twierdzenie (T. Banakh, F.S, R. Wiertelak)

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_G$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ oraz jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

dowód

Dowodu wymaga tylko punkt:
4') $\lambda(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = 0$.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieje domknięty zbiór $K \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A$ taki, że $\mu(K) > 0$. Dla $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\lambda(K)$ i $n \in \mathbb{N}$, niech

$$X_{n,\varepsilon} := \left\{ x \in G : \frac{\lambda((xS_n) \cap K)}{\lambda(S_n)} \geq \varepsilon \right\}.$$

Zauważmy, że

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} X_{n,\varepsilon} \subset \left\{ x \in G : \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda((xS_n) \cap K)}{\lambda(S_n)} > 0 \right\} \subset K \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(A) = \emptyset$$

Twierdzenie (T. Banakh, F.S, R. Wiertelak)

Dla każdego $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_G$, operator $\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ oraz jest operatorem prawie dolnej gęstości i w konsekwencji rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$ jest topologią.

dowód

Dowodu wymaga tylko punkt:
4') $\lambda(\Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A) = 0$.

Przypuśćmy, że tak nie jest. Wówczas istnieje domknięty zbiór $K \subset \Phi_{\mathcal{S}}(A) \setminus A$ taki, że $\mu(K) > 0$. Dla $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\lambda(K)$ i $n \in \mathbb{N}$, niech

$$X_{n,\varepsilon} := \left\{ x \in G : \frac{\lambda((xS_n) \cap K)}{\lambda(S_n)} \geq \varepsilon \right\}.$$

Zauważmy, że

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} X_{n,\varepsilon} \subset \left\{ x \in G : \limsup_{n \to \infty} \frac{\lambda((xS_n) \cap K)}{\lambda(S_n)} > 0 \right\} \subset K \setminus \Phi_{\mathcal{S}}(A) = \emptyset$$

dowód c.d.

Niech $n \in \mathbb{N}$ i oznaczmy $S := S_n$. Mamy

$$\int_G \lambda((xS) \cap K)dx = \int_G \int_G \chi_{K \cap (xS)}(y)dydx = \int_G \left(\int_G \chi_K(y)\chi_S(x^{-1}y)dy \right) dx$$

$$= \int_G \left(\int_G \chi_K(y)\chi_S(x^{-1}y)dx \right) dy = \int_G \left(\int_G \chi_K(y)\chi_{yS^{-1}}(x)dx \right) dy$$

$$= \int_G \chi_K(y)\lambda(yS^{-1})dy = \lambda(K)\lambda(yS^{-1}) = \lambda(K)\lambda(S).$$

Z drugiej strony,

$$\int_G \lambda((xS) \cap K)dx = \int_{X_{n,\varepsilon}} \lambda((xS) \cap K)dx + \int_{G \setminus X_{n,\varepsilon}} \lambda((xS) \cap K)dx \leq$$

$$\lambda(X_{n,\varepsilon})\lambda(S) + (1 - \lambda(X_{n,\varepsilon}))\varepsilon\lambda(S) = (\lambda(X_{n,\varepsilon})(1 - \varepsilon) + \varepsilon)\lambda(S).$$

dowód c.d.

Niech $n \in \mathbb{N}$ i oznaczmy $S := S_n$. Mamy

$$\int_G \lambda((xS)\cap K)dx = \int_G \int_G \chi_{K\cap(xS)}(y)dydx = \int_G \left(\int_G \chi_K(y)\chi_S(x^{-1}y)dy\right) dx$$

$$= \int_G \left(\int_G \chi_K(y)\chi_S(x^{-1}y)dx\right) dy = \int_G \left(\int_G \chi_K(y)\chi_{yS^{-1}}(x)dx\right) dy$$

$$= \int_G \chi_K(y)\lambda(yS^{-1})dy = \lambda(K)\lambda(yS^{-1}) = \lambda(K)\lambda(S).$$

Z drugiej strony,

$$\int_G \lambda((xS)\cap K)dx = \int_{X_{n,\varepsilon}} \lambda((xS)\cap K)dx + \int_{G\setminus X_{n,\varepsilon}} \lambda((xS)\cap K)dx \leq$$

$$\lambda(X_{n,\varepsilon})\lambda(S) + (1-\lambda(X_{n,\varepsilon}))\varepsilon\lambda(S) = (\lambda(X_{n,\varepsilon})(1-\varepsilon)+\varepsilon)\lambda(S).$$

dowód c.d.

Niech $n \in \mathbb{N}$ i oznaczmy $S := S_n$. Mamy

$$\int_G \lambda((xS) \cap K)dx = \int_G \int_G \chi_{K \cap (xS)}(y)dydx = \int_G \left(\int_G \chi_K(y)\chi_S(x^{-1}y)dy \right) dx$$

$$= \int_G \left(\int_G \chi_K(y)\chi_S(x^{-1}y)dx \right) dy = \int_G \left(\int_G \chi_K(y)\chi_{yS^{-1}}(x)dx \right) dy$$

$$= \int_G \chi_K(y)\lambda(yS^{-1})dy = \lambda(K)\lambda(yS^{-1}) = \lambda(K)\lambda(S).$$

Z drugiej strony,

$$\int_G \lambda((xS) \cap K)dx = \int_{X_{n,\varepsilon}} \lambda((xS) \cap K)dx + \int_{G \setminus X_{n,\varepsilon}} \lambda((xS) \cap K)dx \leq$$

$$\lambda(X_{n,\varepsilon})\lambda(S) + (1 - \lambda(X_{n,\varepsilon}))\varepsilon\lambda(S) = (\lambda(X_{n,\varepsilon})(1 - \varepsilon) + \varepsilon)\lambda(S).$$

dowód c.d.

Stąd i wobec tego że $\lambda(S) > 0$, dostajemy

$$\lambda(X_{n,\varepsilon}) \geq \frac{1}{2}\lambda(K),$$

wiec z ciągłości miary otryzmujemy sprzeczność:

$$\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} X_{n,\varepsilon}\right) \geq \frac{1}{2}\lambda(K) > 0.$$

dowód c.d.

Stąd i wobec tego że $\lambda(S) > 0$, dostajemy

$$\lambda(X_{n,\varepsilon}) \geq \frac{1}{2}\lambda(K),$$

wiec z ciągłości miary otryzmujemy sprzeczność:

$$\lambda\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\geq n} X_{n,\varepsilon}\right) \geq \frac{1}{2}\lambda(K) > 0.$$