Zbiory punktów zbieżności dla ciągów pewnych funkcji pierwszej klasy Baire'a

Tomasz Natkaniec (Uniwersytet Gdański),
Waldemar Sieg (UKW Bydgoszcz)

Konopnica, 23-24.06.2018

X - przestrzeń metryczna, $\vec{f} = \{f_n \colon X \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\} = (f_n)_n$

X - przestrzeń metryczna, $\vec{f} = \{f_n \colon X \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\} = (f_n)_n$

$$L(\vec{f}) \quad = \quad \{x \in X \colon (f_n(x)) \text{ jest zbieżny}\}$$

X - przestrzeń metryczna, $\vec{f} = \{f_n \colon X \to \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\} = (f_n)_n$

$$L(\vec{f}) = \{x \in X \colon (f_n(x)) \text{ jest zbieżny}\}$$

Hahn [4, 1919], Sierpiński [5, 1921]

Podzbiór A przestrzeni polskiej X jest typu $F_{\sigma\delta}(X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg $\vec{f} = (f_n)_n$ funkcji ciągłych $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ taki, że $A = L(\vec{f})$.

$$
\begin{aligned}
L_{-\infty}(\vec{f}) &= \{x \in X\colon \lim f_n(x) = -\infty\};\\
L_{+\infty}(\vec{f}) &= \{x \in X\colon \lim f_n(x) = +\infty\};
\end{aligned}
$$

$$L_{-\infty}(\vec{f}) = \{x \in X\colon \lim f_n(x) = -\infty\};$$
$$L_{+\infty}(\vec{f}) = \{x \in X\colon \lim f_n(x) = +\infty\};$$

Lipiński [1, 1961]

Dla dowolnych zbiorów $L_1,\ L_2 \subset \mathbb{R}$ typu $F_{\sigma\delta}$ rozdzielonych przez zbiory typu F_σ istnieje ciąg $\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ funkcji ciągłych taki, że $L_1 = L_{+\infty}(\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\})$ i $L_2 = L_{-\infty}(\{f_n\colon n \in \mathbb{N}\})$.

Lunina [3, 1975]

$$
\begin{aligned}
E^1(\vec{f}) &= \{x \in X\colon (f_n(x)) \text{ jest zbieżny}\};\\
E^2(\vec{f}) &= \{x \in X\colon \lim f_n(x) = -\infty\};\\
E^3(\vec{f}) &= \{x \in X\colon \lim f_n(x) = +\infty\};\\
E^4(\vec{f}) &= \{x \in X\colon -\infty < \underline{\lim}\, f_n(x) < \overline{\lim}\, f_n(x) < +\infty\};\\
E^5(\vec{f}) &= \{x \in X\colon -\infty = \underline{\lim}\, f_n(x) < \overline{\lim}\, f_n(x) < +\infty\};\\
E^6(\vec{f}) &= \{x \in X\colon -\infty < \underline{\lim}\, f_n(x) < \overline{\lim}\, f_n(x) = +\infty\};\\
E^7(\vec{f}) &= \{x \in X\colon -\infty = \underline{\lim}\, f_n(x)\ \&\ \overline{\lim}\, f_n(x) = +\infty\}.
\end{aligned}
$$

Lunina [3, 1975]

$$
\begin{aligned}
E^1(\vec{f}) &= \{x \in X \colon (f_n(x)) \text{ jest zbieżny}\};\\
E^2(\vec{f}) &= \{x \in X \colon \lim f_n(x) = -\infty\};\\
E^3(\vec{f}) &= \{x \in X \colon \lim f_n(x) = +\infty\};\\
E^4(\vec{f}) &= \{x \in X \colon -\infty < \underline{\lim}\ f_n(x) < \overline{\lim}\ f_n(x) < +\infty\};\\
E^5(\vec{f}) &= \{x \in X \colon -\infty = \underline{\lim}\ f_n(x) < \overline{\lim}\ f_n(x) < +\infty\};\\
E^6(\vec{f}) &= \{x \in X \colon -\infty < \underline{\lim}\ f_n(x) < \overline{\lim}\ f_n(x) = +\infty\};\\
E^7(\vec{f}) &= \{x \in X \colon -\infty = \underline{\lim}\ f_n(x)\ \&\ \overline{\lim}\ f_n(x) = +\infty\}.
\end{aligned}
$$

Twierdzenie

Niech $E^1, \ldots E^7$ będą podzbiorami przestrzeni metrycznej X. Wówczas istnieje ciąg $\vec{f} \subset \mathcal{C}(X)$ taki, że $E^i(\vec{f}) = E^i$ dla $i = 1, \ldots, 7$, wtedy i tylko wtedy, gdy spełnione są następujące warunki:

1. zbiory $E^1, \ldots, E^7$ tworzą partycję przestrzeni X;
2. zbiory E^1, E^2, E^3 są typu $F_{\sigma\delta}(X)$;
3. sumy zbiorów $E^3 \cup E^5 \cup E^7$ oraz $E^2 \cup E^6 \cup E^7$ są typu $G_\delta(X)$.

$\mathcal{F}(X) \subset \mathbb{R}^X$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathcal{F}(X)) &= \{L(\vec{f})\colon \vec{f} \subset \mathcal{F}(X)\};\\
\mathcal{L}_{+\infty}(\mathcal{F}(X)) &= \{L_{+\infty}(\vec{f})\colon \vec{f} \subset \mathcal{F}(X)\};\\
\mathcal{L}_{-\infty}(\mathcal{F}(X)) &= \{L_{-\infty}(\vec{f})\colon \vec{f} \subset \mathcal{F}(X)\}.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{F}(X) \subset \mathbb{R}^X$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathcal{F}(X)) &= \{L(\vec{f})\colon \vec{f} \subset \mathcal{F}(X)\};\\
\mathcal{L}_{+\infty}(\mathcal{F}(X)) &= \{L_{+\infty}(\vec{f})\colon \vec{f} \subset \mathcal{F}(X)\};\\
\mathcal{L}_{-\infty}(\mathcal{F}(X)) &= \{L_{-\infty}(\vec{f})\colon \vec{f} \subset \mathcal{F}(X)\}.
\end{aligned}$$

J. Wesołowska, PhD

Niech X będzie przestrzenią metryczną. Wówczas $\mathcal{L}(B_1(X)) = \mathcal{L}_{+\infty}(B_1(X)) = \mathcal{L}_{-\infty}(B_1(X)) = G_{\delta\sigma\delta}(X)$.

$\mathcal{F}(X) \subset \mathbb{R}^X$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathcal{F}(X)) &= \{L(\vec{f})\colon \vec{f} \subset \mathcal{F}(X)\};\\
\mathcal{L}_{+\infty}(\mathcal{F}(X)) &= \{L_{+\infty}(\vec{f})\colon \vec{f} \subset \mathcal{F}(X)\};\\
\mathcal{L}_{-\infty}(\mathcal{F}(X)) &= \{L_{-\infty}(\vec{f})\colon \vec{f} \subset \mathcal{F}(X)\}.
\end{aligned}$$

J. Wesołowska, PhD

Niech X będzie przestrzenią metryczną. Wówczas $\mathcal{L}(B_1(X)) = \mathcal{L}_{+\infty}(B_1(X)) = \mathcal{L}_{-\infty}(B_1(X)) = G_{\delta\sigma\delta}(X)$.

Uwaga

Niech $\vec{f} = (f_n)_n$. Wówczas

$$L(\vec{f}) = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \{x \in X\colon |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leqslant \tfrac{1}{m}\};$$

Funkcje o domkniętym wykresie

$B(\vec{f})$: zbiór wszystkich punktów $x \in X$ dla których ciąg $(f_n(x))_n$ jest ograniczony

Funkcje o domkniętym wykresie

$B(\vec{f})$: zbiór wszystkich punktów $x \in X$ dla których ciąg $(f_n(x))_n$ jest ograniczony

Ograniczoność

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Jeśli $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ jest ciągiem funkcji o domkniętym wykresie, to $B(\vec{f}) \in F_\sigma(X)$.

Funkcje o domkniętym wykresie

$B(\vec{f})$: zbiór wszystkich punktów $x \in X$ dla których ciąg $(f_n(x))_n$ jest ograniczony

Ograniczoność

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Jeśli $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ jest ciągiem funkcji o domkniętym wykresie, to $B(\vec{f}) \in F_\sigma(X)$.

Zbieżność

Niech X będzie przestrzenią topologiczną. Jeżeli $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ jest ciągiem funkcji o domkniętym wykresie, to $L(\vec{f}) \in F_{\sigma\delta}(X)$.

Twierdzenie

Niech X będzie przestrzenią metryczną. Dla dowolnych zbiorów $A, B \subset X$ takich, że $A \subset B$, następujące warunki są równoważne:

1. $A \in F_{\sigma\delta}(X)$, $B \in F_\sigma(X)$;
2. Istnieje ciąg $\vec{f} = (f_n)_n$ funkcji ciągłych taki, że $A = L(\vec{f})$ oraz $B = B(\vec{f})$;
3. Istnieje ciąg funkcji $\vec{f} = (f_n)_n$ o domkniętym wykresie taki, że $A = L(\vec{f})$ oraz $B = B(\vec{f})$.

Uwaga

$$L_\infty(\vec{f}) \quad = \quad \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant k} [f_n \geqslant m]$$

Uwaga

$$L_\infty(\vec{f}) \quad = \quad \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant k} [f_n \geqslant m]$$

Rozbieżność

Niech X będzie przestrzenią normalną. Jeśli $\vec{f} = (f_n)_n$ jest ciągiem funkcji o domkniętym wykresie, to $L_\infty(\vec{f}) \in G_{\delta\sigma\delta}(X)$.

Uwaga

$$L_\infty(\vec{f}) \quad = \quad \bigcap_{m\in\mathbb{N}}\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\bigcap_{n\geqslant k}[f_n \geqslant m]$$

Rozbieżność

Niech X będzie przestrzenią normalną. Jeśli $\vec{f} = (f_n)_n$ jest ciągiem funkcji o domkniętym wykresie, to $L_\infty(\vec{f}) \in G_{\delta\sigma\delta}(X)$.

Uwaga

Istnieje ciąg $\vec{f} = (f_n)_n$ funkcji o domkniętym wykresie $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taki, że $L_\infty(\vec{f}) \in G_{\delta\sigma} \setminus F_{\sigma\delta}$.

Uwaga

$$L_\infty(\vec{f}) \quad = \quad \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geqslant k} [f_n \geqslant m]$$

Rozbieżność

Niech X będzie przestrzenią normalną. Jeśli $\vec{f} = (f_n)_n$ jest ciągiem funkcji o domkniętym wykresie, to $L_\infty(\vec{f}) \in G_{\delta\sigma\delta}(X)$.

Uwaga

Istnieje ciąg $\vec{f} = (f_n)_n$ funkcji o domkniętym wykresie $f_n \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taki, że $L_\infty(\vec{f}) \in G_{\delta\sigma} \setminus F_{\sigma\delta}$.

Problem

Czy prawdziwa jest równość $\mathcal{L}_\infty(\mathcal{U}(\mathbb{R})) = G_{\delta\sigma\delta}(\mathbb{R})$?

Borzestowski, Recław [1, 2010]

$$
\begin{aligned}
E^1_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon (f_n(x)) \text{ is } \mathcal{I}\text{-zbieżny}\};\\
E^2_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon \mathcal{I}-\lim f_n(x) = -\infty\};\\
E^3_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon \mathcal{I}-\lim f_n(x) = +\infty\};\\
E^4_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon -\infty < \mathcal{I}-\underline{\lim}\ f_n(x) < \mathcal{I}-\overline{\lim}\ f_n(x) < +\infty\};\\
E^5_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon -\infty = \mathcal{I}-\underline{\lim}\ f_n(x) < \mathcal{I}-\overline{\lim}\ f_n(x) < +\infty\};\\
E^6_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon -\infty < \mathcal{I}-\underline{\lim}\ f_n(x) < \mathcal{I}-\overline{\lim}\ f_n(x) = +\infty\};\\
E^7_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon -\infty = \mathcal{I}-\underline{\lim}\ f_n(x)\ \&\ \mathcal{I}-\overline{\lim}\ f_n(x) = +\infty\}.
\end{aligned}
$$

Borzestowski, Recław [1, 2010]

$$
\begin{aligned}
E^1_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon (f_n(x)) \text{ is } \mathcal{I}\text{-zbieżny}\};\\
E^2_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon \mathcal{I} - \lim f_n(x) = -\infty\};\\
E^3_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon \mathcal{I} - \lim f_n(x) = +\infty\};\\
E^4_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon -\infty < \mathcal{I} - \underline{\lim}\ f_n(x) < \mathcal{I} - \overline{\lim}\ f_n(x) < +\infty\};\\
E^5_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon -\infty = \mathcal{I} - \underline{\lim}\ f_n(x) < \mathcal{I} - \overline{\lim}\ f_n(x) < +\infty\};\\
E^6_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon -\infty < \mathcal{I} - \underline{\lim}\ f_n(x) < \mathcal{I} - \overline{\lim}\ f_n(x) = +\infty\};\\
E^7_{\mathcal{I}}(\vec{f}) &= \{x\colon -\infty = \mathcal{I} - \underline{\lim}\ f_n(x)\ \&\ \mathcal{I} - \overline{\lim}\ f_n(x) = +\infty\}.
\end{aligned}
$$

Twierdzenie

Niech X będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem typu F_σ. Wówczas dla ciągu zbiorów $E^1, \ldots, E^7 \subset X$ następujące warunki są równoważne:

1. istnieje ciąg $\vec{f} \subset \mathcal{C}(X)$ taki, że $E^i(\vec{f}) = E^i$ dla $i = 1, \ldots, 7$;
2. istnieje ciąg $\vec{f} \subset \mathcal{C}(X)$ taki, że $E^i_{\mathcal{I}}(\vec{f}) = E^i$ dla $i = 1, \ldots, 7$.

punkty ideałowej ograniczoności

Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem typu F_σ. Jeśli $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ jest ciągiem funkcji o domkniętym wykresie, to $B_{\mathcal{I}}(\vec{f}) \in F_\sigma(X)$.

punkty ideałowej ograniczoności

Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem typu F_σ. Jeśli $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ jest ciągiem funkcji o domkniętym wykresie, to $B_{\mathcal{I}}(\vec{f}) \in F_\sigma(X)$.

punkty ideałowej zbieżności

Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $\mathcal{I}$ bedzie ideałem typu F_σ. Jeśli $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ jest ciągiem funkcji o domkniętym wykresie, to $L_{\mathcal{I}}(\vec{f}) \in F_{\sigma\delta}(X)$.

Twierdzenie

Niech X będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem typu F_σ. Dla każdej pary zbiorów $A, B \subset X$ takich, że $A \subset B$ następujące warunki są równoważne:

1. $A \in F_{\sigma\delta}(X)$, $B \in F_\sigma(X)$;
2. Istnieje ciąg $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ funkcji ciągłych taki, że $A = L_\mathcal{I}(\vec{f})$ oraz $B = B_\mathcal{I}(\vec{f})$;
3. Istnieje ciąg $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ funkcji o domkniętym wykresie taki, że $A = L_\mathcal{I}(\vec{f})$ oraz $B = B_\mathcal{I}(\vec{f})$.

Twierdzenie

Niech X będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem typu F_σ. Dla każdej pary zbiorów $A, B \subset X$ takich, że $A \subset B$ następujące warunki są równoważne:

1. $A \in F_{\sigma\delta}(X)$, $B \in F_\sigma(X)$;
2. Istnieje ciąg $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ funkcji ciągłych taki, że $A = L_{\mathcal{I}}(\vec{f})$ oraz $B = B_{\mathcal{I}}(\vec{f})$;
3. Istnieje ciąg $\vec{f} \subset \mathbb{R}^X$ funkcji o domkniętym wykresie taki, że $A = L_{\mathcal{I}}(\vec{f})$ oraz $B = B_{\mathcal{I}}(\vec{f})$.

Problem

Niech X będzie przestrzenią metryczną oraz niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem typu F_σ. Scharakteryzować siódemki $\langle E^1_{\mathcal{I}}(\vec{f}), \ldots, E^7_{\mathcal{I}}(\vec{f})\rangle$ dla ciągów $\vec{f} \subset \mathcal{U}(X)$.

Grande [3, 2000]

Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wówczas punktowa granica ciągu funkcji o domkniętym wykresie jest funkcją z pierwszej klasy Baire'a.

Grande [3, 2000]

Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wówczas punktowa granica ciągu funkcji o domkniętym wykresie jest funkcją z pierwszej klasy Baire'a.

Lemat

Niech $(f_n)_n$ będzie ciągiem funkcji $f_n : X \to \mathbb{R}$ o domkniętym wykresie określonych na przestrzeni topologicznej X oraz niech $f_n \to f$. Wówczas f jest funkcją z pierwszej klasy Borela.

Grande [3, 2000]

Niech X będzie przestrzenią metryczną zupełną. Wówczas punktowa granica ciągu funkcji o domkniętym wykresie jest funkcją z pierwszej klasy Baire'a.

Lemat

Niech $(f_n)_n$ będzie ciągiem funkcji $f_n : X \to \mathbb{R}$ o domkniętym wykresie określonych na przestrzeni topologicznej X oraz niech $f_n \to f$. Wówczas f jest funkcją z pierwszej klasy Borela.

Wniosek

Niech X będzie doskonale normalną przestrzenią topologiczną. Wówczas $\mathrm{LIM}(\mathcal{U}(X)) = B_1(X)$.

Granice ideałowe ciągów funkcji o domkniętym wykresie

Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem takim, że filtr dualny $\mathcal{I}^\star$ jest ω-diagonalizowalny przez rodzinę $\mathcal{I}^\star$-zbiorów uniwersalnych. Jeżeli $(f_n)_n$ jest ciągiem funkcji $f_n : X \to \mathbb{R}$ o domkniętym wykresie oraz $\mathcal{I} - lim_n f_n = f$, to f jest funkcją z pierwszej klasy Borela.

Granice ideałowe ciągów funkcji o domkniętym wykresie

Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem takim, że filtr dualny $\mathcal{I}^\star$ jest ω-diagonalizowalny przez rodzinę $\mathcal{I}^\star$-zbiorów uniwersalnych. Jeżeli $(f_n)_n$ jest ciągiem funkcji $f_n : X \to \mathbb{R}$ o domkniętym wykresie oraz $\mathcal{I} - lim_n f_n = f$, to f jest funkcją z pierwszej klasy Borela.

Filipów, Szuca [2, 2012]

Niech X będzie doskonale normalna. Jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem takim, że filtr dualny $\mathcal{I}^\star$ jest ω-diagonalizowalny przez rodzinę $\mathcal{I}^\star$-zbiorów uniwersalnych, to $\mathcal{I} - \mathrm{LIM}(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{B}_1(X)$.

Granice ideałowe ciągów funkcji o domkniętym wykresie

Niech X będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem takim, że filtr dualny $\mathcal{I}^\star$ jest ω-diagonalizowalny przez rodzinę $\mathcal{I}^\star$-zbiorów uniwersalnych. Jeżeli $(f_n)_n$ jest ciągiem funkcji $f_n : X \to \mathbb{R}$ o domkniętym wykresie oraz $\mathcal{I} - lim_n f_n = f$, to f jest funkcją z pierwszej klasy Borela.

Filipów, Szuca [2, 2012]

Niech X będzie doskonale normalna. Jeżeli $\mathcal{I}$ jest ideałem takim, że filtr dualny $\mathcal{I}^\star$ jest ω-diagonalizowalny przez rodzinę $\mathcal{I}^\star$-zbiorów uniwersalnych, to $\mathcal{I} - \mathrm{LIM}(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{B}_1(X)$.

Wniosek

Niech X będzie doskonale normalna oraz niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem takim, że filtr dualny $\mathcal{I}^\star$ jest ω-diagonalizowalny przez rodzinę $\mathcal{I}^\star$-zbiorów uniwersalnych. Wówczas
$\mathcal{I} - \mathrm{LIM}(\mathcal{U}(X)) = \mathcal{I} - \mathrm{LIM}(\mathcal{C}(X)) = \mathcal{B}_1(X)$.

D. Borzestowski, I. Recław, *On Lunina's 7-tuples for ideal convergence*, Real Anal. Exchange **35** (2010), no. 2, 479–485.

R. Filipów, P. Szuca, *Three kinds of convergence and the associated $\mathcal{I}$-Baire classes*, J. Math. Anal. Appl. **391** (2012), no. 1, 1–9.

Z. Grande, *On pointwise, discrete and transfinite limits of sequences of closed graph functions*, Real Anal. Exchange **26** (2000–2001), no. 2, 933–941.

H. Hahn, *Uber die Menge der Konvergenzpunkte einer Funktionfolge*, Arch. der Math. und Physik **28** (1919), 34–45.

A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995.

J.S. Lipiński, *Convergence to infinity of a sequence of continuous functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **140** (1961), 752–754 (in Russian).

J.S. Lipiński, *Sets of points of convergence to infinity of a sequence of continuous functions*, Fund. Math., **51** (1962/1963), 35–43 (in Russian).

M.A. Lunina, *Convergence and divergence sets of sequences of real continuous functions on a metric space*, Math. Notes **17**, (1975), 120–126.

T. Natkaniec, J. Wesołowska, *Sets of ideal convergence of sequences of quasi-continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **423** (2015), 924–939.

W. Sierpiński, *Sur l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues*, Fund. Math. **2** (1921), 41–49.

Dziękuję za uwagę :-)