# Łuzin i Sierpiński wśród drzew

Marcin Michalski,
z pracy wspólnej z R. Rałowskim & Sz. Żeberskim

Politechnika Wrocławska

IV Warsztaty z Analizy Rzeczywistej
23-24.06.2018, Konopnica

## Definicja

*Niech $T \subseteq \omega^{<\omega}$ będzie drzewem. Wtedy*

- *dla każdego $\tau \in T$ $succ(\tau) = \{n \in \omega : \tau^\frown n \in T\}$;*
- *$split(T) = \{\tau \in T : |succ(\tau)| \geqslant 2\}$;*
- *$\omega$-$split(T) = \{\tau \in T : |succ(\tau)| = \omega\}$.*
- *$stem(T) \in T$ jest węzłem $\tau$, dla którego $\sigma \subsetneq \tau$ $|succ(\sigma)| = 1$ i $|succ(\tau)| > 1$.*

## Definicja

*Drzewo* $T$ *na* $\omega$ *nazywamy*

- *drzewem Sacksa lub doskonałym, oznaczenie* $T \in \mathbb{S}$, *jeśli dla każdego węzła* $\sigma \in T$ *istnieje* $\tau \in T$, *dla którego* $\sigma \subseteq \tau$ *i* $|succ(\tau)| \geqslant 2$;
- *drzewem Millera lub superdoskonałym, oznaczenie:* $T \in \mathbb{M}$, *jeśli dla każdego węzła* $\sigma \in T$ *istnieje* $\tau \in T$, *dla którego* $\sigma \subseteq \tau$ *i* $|succ(\tau)| = \omega$;
- *drzewem Lavera, oznaczenie:* $T \in \mathbb{L}$, *jeśli dla każdego węzła* $\tau \supseteq stem(T)$ *zachodzi* $|succ(\tau)| = \omega$;
- *zupełnym drzewem Lavera, oznaczenie:* $T \in \mathbb{CL}$, *jeśli* $T$ *jest drzewem Lavera i* $stem(T) = \emptyset$;

**Definicja (Ideał drzewiasty $t_0$)**

*Niech $\mathbb{T}$ będzie rodziną drzew. Mówimy, że $A$ należy do ideału drzewiastego $t_0$, jeśli*

$$(\forall T \in \mathbb{T})(\exists T' \in \mathbb{T})(T' \subseteq T \ \ \& \ \ [T'] \cap A = \emptyset)$$

Niech $h : \omega^\omega \to \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ będzie homeomorfizmem.

**Definicja (Ideał drzewiasty $t_0$ - modyfikacja dla $\mathbb{R}$)**

*Niech $\mathbb{T}$ będzie rodziną drzew. Powiemy, że $A \subseteq \mathbb{R}$ należy do ideału drzewiastego $t_0 \subseteq P(\mathbb{R})$, jeśli*

$$(\forall T \in \mathbb{T})(\exists T' \in \mathbb{T})(T' \subseteq T \ \ \& \ \ h[[T']] \cap A = \emptyset)$$

Niech $h : \omega^\omega \to \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ będzie homeomorfizmem.

**Definicja (Ideał drzewiasty $t_0$ - modyfikacja dla $\mathbb{R}$)**

*Niech $\mathbb{T}$ będzie rodziną drzew. Powiemy, że $A \subseteq \mathbb{R}$ należy do ideału drzewiastego $t_0 \subseteq P(\mathbb{R})$, jeśli*

$$(\forall T \in \mathbb{T})(\exists T' \in \mathbb{T})(T' \subseteq T \ \ \& \ \ h[[T']] \cap A = \emptyset)$$

Klasyczny przykład: ideał Marczewskiego $s_0$ dla rodziny drzew doskonałych $\mathbb{S}$.
$\mathbb{M} - m_0$, $\mathbb{L} - l_0$, $\mathbb{CL} - cl_0$.
Dla wygody będziemy pomijać powoływanie się na $h$, czyli założymy, że ciała drzew już leżą na $\mathbb{R}$.

Niech $\mathcal{I}$ będzie ideałem, a $X$ przestrzenią polską.

**Definicja**

*$L$ nazywamy zbiorem $\mathcal{I}$-Łuzina, jeśli $|L \cap A| < |L|$ dla każdego zbioru $A \in \mathcal{I}$.*

Dla klasycznych ideałów zbiorów miary zero Lebesgue'a $\mathcal{N}$ i zbiorów I kategorii $\mathcal{M}$ zbiory $\mathcal{N}$-Łuzina nazywamy uogólnionymi zbiorami Sierpińskiego, a zbiory $\mathcal{M}$-Łuzina uogólnionymi zbiorami Łuzina.

**Twierdzenie (M., Rałowski, Żeberski 2017)**

*Załóżmy, że $\mathfrak{c}$ jest regularną liczbą kardynalną i niech $t_0 \in \{s_0, m_0, l_0, cl_0\}$. Wtedy dla każdego uogólnionego zbioru Łuzina $L$ i uogólnionego zbioru Sierpińskiego $S$ zachodzi $L + S \in t_0$.*

**Lemat**

*Istnieje taki gęsty zbiór $G$ typu $G_\delta$, że dla każdego drzewa Millera (odp. Lavera lub zupełnego Lavera) $T$ istnieje poddrzewo Millera (odp. Lavera lub zupełne Lavera) $T'$, dla którego $G + [T'] \in \mathcal{N}$.*

Rozważmy pewien konkretny rodzaj *fuzji* dla drzew Millera i Lavera.
Niech $T$ będzie drzewem Millera.

Rozważmy pewien konkretny rodzaj *fuzji* dla drzew Millera i Lavera. Niech $T$ będzie drzewem Millera.

- Ustalmy $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T)$, $B_0 = \{\tau_\emptyset\}$ i niech $T_0 \subseteq T$ będzie drzewem Millera, dla którego $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T_0)$.

Rozważmy pewien konkretny rodzaj *fuzji* dla drzew Millera i Lavera. Niech $T$ będzie drzewem Millera.

- Ustalmy $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T)$, $B_0 = \{\tau_\emptyset\}$ i niech $T_0 \subseteq T$ będzie drzewem Millera, dla którego $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T_0)$.
- Załóżmy, że w kroku $n+1$ mamy już drzewo Millera $T_n$ i zbiór węzłów

$$B_n = \{\tau_\sigma : \sigma \in n^{\leqslant n}\}.$$

Rozważmy pewien konkretny rodzaj *fuzji* dla drzew Millera i Lavera. Niech $T$ będzie drzewem Millera.

- Ustalmy $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T)$, $B_0 = \{\tau_\emptyset\}$ i niech $T_0 \subseteq T$ będzie drzewem Millera, dla którego $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T_0)$.
- Załóżmy, że w kroku $n+1$ mamy już drzewo Millera $T_n$ i zbiór węzłów
$$B_n = \{\tau_\sigma : \sigma \in n^{\leqslant n}\}.$$
Rozszerzmy ten zbiór do
$$B_{n+1} = \{\tau_\sigma : \sigma \in (n+1)^{\leqslant n+1}\},$$
w taki sposób, by $\tau_\sigma \subsetneq \tau_{\sigma^\frown k}$ dla $\sigma \in (n+1)^{\leqslant n}$ oraz $\tau_\sigma \in \omega\text{-}split(T_n)$ dla $\sigma \in (n+1)^{\leqslant n+1}$.

Rozważmy pewien konkretny rodzaj *fuzji* dla drzew Millera i Lavera. Niech $T$ będzie drzewem Millera.

- Ustalmy $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T)$, $B_0 = \{\tau_\emptyset\}$ i niech $T_0 \subseteq T$ będzie drzewem Millera, dla którego $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T_0)$.
- Załóżmy, że w kroku $n+1$ mamy już drzewo Millera $T_n$ i zbiór węzłów
$$B_n = \{\tau_\sigma : \sigma \in n^{\leqslant n}\}.$$
Rozszerzmy ten zbiór do
$$B_{n+1} = \{\tau_\sigma : \sigma \in (n+1)^{\leqslant n+1}\},$$
w taki sposób, by $\tau_\sigma \subsetneq \tau_{\sigma^\frown k}$ dla $\sigma \in (n+1)^{\leqslant n}$ oraz $\tau_\sigma \in \omega\text{-}split(T_n)$ dla $\sigma \in (n+1)^{\leqslant n+1}$.Połóżmy następnie drzewo Millera $T_{n+1} \subseteq T_n$, dla którego węzły $B_{n+1}$ są nadal nieskończenie splitujące.

Rozważmy pewien konkretny rodzaj *fuzji* dla drzew Millera i Lavera. Niech $T$ będzie drzewem Millera.

- Ustalmy $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T)$, $B_0 = \{\tau_\emptyset\}$ i niech $T_0 \subseteq T$ będzie drzewem Millera, dla którego $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T_0)$.
- Załóżmy, że w kroku $n+1$ mamy już drzewo Millera $T_n$ i zbiór węzłów
$$B_n = \{\tau_\sigma : \sigma \in n^{\leqslant n}\}.$$
Rozszerzmy ten zbiór do
$$B_{n+1} = \{\tau_\sigma : \sigma \in (n+1)^{\leqslant n+1}\},$$
w taki sposób, by $\tau_\sigma \subsetneq \tau_{\sigma^\frown k}$ dla $\sigma \in (n+1)^{\leqslant n}$ oraz $\tau_\sigma \in \omega\text{-}split(T_n)$ dla $\sigma \in (n+1)^{\leqslant n+1}$.Połóżmy następnie drzewo Millera $T_{n+1} \subseteq T_n$, dla którego węzły $B_{n+1}$ są nadal nieskończenie splitujące.
- Niech $T' = \bigcap_{n\in\omega} T_n$. Ponieważ $\bigcup_{n\in\omega} B_n \subseteq T'$, $T'$ jest drzewem Millera.

Rozważmy pewien konkretny rodzaj *fuzji* dla drzew Millera i Lavera. Niech $T$ będzie drzewem Millera.

- Ustalmy $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T)$, $B_0 = \{\tau_\emptyset\}$ i niech $T_0 \subseteq T$ będzie drzewem Millera, dla którego $\tau_\emptyset \in \omega\text{-}split(T_0)$.
- Załóżmy, że w kroku $n+1$ mamy już drzewo Millera $T_n$ i zbiór węzłów
$$B_n = \{\tau_\sigma : \sigma \in n^{\leqslant n}\}.$$
Rozszerzmy ten zbiór do
$$B_{n+1} = \{\tau_\sigma : \sigma \in (n+1)^{\leqslant n+1}\},$$
w taki sposób, by $\tau_\sigma \subsetneq \tau_{\sigma^\frown k}$ dla $\sigma \in (n+1)^{\leqslant n}$ oraz $\tau_\sigma \in \omega\text{-}split(T_n)$ dla $\sigma \in (n+1)^{\leqslant n+1}$.Połóżmy następnie drzewo Millera $T_{n+1} \subseteq T_n$, dla którego węzły $B_{n+1}$ są nadal nieskończenie splitujące.
- Niech $T' = \bigcap_{n\in\omega} T_n$. Ponieważ $\bigcup_{n\in\omega} B_n \subseteq T'$, $T'$ jest drzewem Millera.
- Analogicznie dokonujemy fuzji dla drzew Lavera.

**Lemat**

*Dla każdego ciągu odcinków $(I_n)_{n\in\omega}$ i każdego drzewa Millera (odp. Lavera) $T$ istnieje ciąg fuzyjny poddrzew Millera (odp. Lavera) $(T_n)_{n\in\omega}$ o własności:*

$$\lambda([T_n]+I_n) < (1+\Sigma_{k=0}^{n-1}(n-1)^k)\lambda(I_n) \text{ dla każdego } n>0.$$

## Lemat

*Dla każdego ciągu odcinków $(I_n)_{n\in\omega}$ i każdego drzewa Millera (odp. Lavera) $T$ istnieje ciąg fuzyjny poddrzew Millera (odp. Lavera) $(T_n)_{n\in\omega}$ o własności:*

$$\lambda([T_n]+I_n) < (1+\Sigma_{k=0}^{n-1}(n-1)^k)\lambda(I_n) \text{ dla każdego } n>0.$$

## Idea dowodu.

Przez fuzję, korzystając z faktu, że każdy odcinek możemy przesunąć tak, by "połknął" nieskończenie wiele bazowych zbiorów otwarto-domkniętych rozpiętych na węzłach. $\square$

## Lemat

*Istnieje taki gęsty zbiór $G$ typu $G_\delta$, że dla każdego drzewa Millera (odp. Lavera lub zupełnego Lavera) $T$ istnieje poddrzewo Millera (odp. Lavera lub zupełne Lavera) $T'$, dla którego $G + [T'] \in \mathcal{N}$.*

### Lemat

*Istnieje taki gęsty zbiór $G$ typu $G_\delta$, że dla każdego drzewa Millera (odp. Lavera lub zupełnego Lavera) $T$ istnieje poddrzewo Millera (odp. Lavera lub zupełne Lavera) $T'$, dla którego $G + [T'] \in \mathcal{N}$.*

### Dowód.

- $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$ i niech $I_n$ będzie odcinkiem o środku $q_n$ i mierze $\lambda(I_n) < \frac{1}{(n)^{n-1}2^n}$.

## Lemat

*Istnieje taki gęsty zbiór $G$ typu $G_\delta$, że dla każdego drzewa Millera (odp. Lavera lub zupełnego Lavera) $T$ istnieje poddrzewo Millera (odp. Lavera lub zupełne Lavera) $T'$, dla którego $G + [T'] \in \mathcal{N}$.*

## Dowód.

- $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$ i niech $I_n$ będzie odcinkiem o środku $q_n$ i mierze $\lambda(I_n) < \frac{1}{(n)^{n-1}2^n}$.
- Niech $T$ będzie drzewem Miller i niech $(T_n)_{n\in\omega}$ będzie ciągiem fuzyjnym poddrzew Millera dla $T$ i odcinków $I_n$ w myśl poprzedniego Lematu.

## Lemat

*Istnieje taki gęsty zbiór $G$ typu $G_\delta$, że dla każdego drzewa Millera (odp. Lavera lub zupełnego Lavera) $T$ istnieje poddrzewo Millera (odp. Lavera lub zupełne Lavera) $T'$, dla którego $G + [T'] \in \mathcal{N}$.*

## Dowód.

- $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$ i niech $I_n$ będzie odcinkiem o środku $q_n$ i mierze $\lambda(I_n) < \frac{1}{(n)^{n-1}2^n}$.
- Niech $T$ będzie drzewem Miller i niech $(T_n)_{n\in\omega}$ będzie ciągiem fuzyjnym poddrzew Millera dla $T$ i odcinków $I_n$ w myśl poprzedniego Lematu.
- Wtedy dla każdego $n$ zachodzi $\lambda([T_n] + I_n) < \frac{1}{2^n}$ i możemy położyć $T' = \bigcap_{n\in\omega} T_n$ zamiast $T_n$.

## Lemat

*Istnieje taki gęsty zbiór $G$ typu $G_\delta$, że dla każdego drzewa Millera (odp. Lavera lub zupełnego Lavera) $T$ istnieje poddrzewo Millera (odp. Lavera lub zupełne Lavera) $T'$, dla którego $G + [T'] \in \mathcal{N}$.*

## Dowód.

- $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$ i niech $I_n$ będzie odcinkiem o środku $q_n$ i mierze $\lambda(I_n) < \frac{1}{(n)^{n-1}2^n}$.
- Niech $T$ będzie drzewem Miller i niech $(T_n)_{n\in\omega}$ będzie ciągiem fuzyjnym poddrzew Millera dla $T$ i odcinków $I_n$ w myśl poprzedniego Lematu.
- Wtedy dla każdego $n$ zachodzi $\lambda([T_n] + I_n) < \frac{1}{2^n}$ i możemy położyć $T' = \bigcap_{n\in\omega} T_n$ zamiast $T_n$.
- Stąd $\lambda(\bigcup_{k>n} I_k + [T']) \leqslant \Sigma_{k>n}\lambda([T'] + I_k) \leqslant \Sigma_{k>n}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$;

## Lemat

*Istnieje taki gęsty zbiór $G$ typu $G_\delta$, że dla każdego drzewa Millera (odp. Lavera lub zupełnego Lavera) $T$ istnieje poddrzewo Millera (odp. Lavera lub zupełne Lavera) $T'$, dla którego $G + [T'] \in \mathcal{N}$.*

## Dowód.

- $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \omega\}$ i niech $I_n$ będzie odcinkiem o środku $q_n$ i mierze $\lambda(I_n) < \frac{1}{(n)^{n-1}2^n}$.
- Niech $T$ będzie drzewem Miller i niech $(T_n)_{n\in\omega}$ będzie ciągiem fuzyjnym poddrzew Millera dla $T$ i odcinków $I_n$ w myśl poprzedniego Lematu.
- Wtedy dla każdego $n$ zachodzi $\lambda([T_n] + I_n) < \frac{1}{2^n}$ i możemy położyć $T' = \bigcap_{n\in\omega} T_n$ zamiast $T_n$.
- Stąd $\lambda(\bigcup_{k>n} I_k + [T']) \leqslant \Sigma_{k>n}\lambda([T'] + I_k) \leqslant \Sigma_{k>n}\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$;
- i dla $G = \bigcap_{n\in\omega} \bigcup_{k>n} I_k$ mamy $\lambda(G + [T']) \leqslant lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0$.

$\square$

**Twierdzenie (Rothberger)**

*Załóżmy, że $L$ jest uogólnionym zbiorem Łuzina, a $S$ uogólnionym zbiorem Sierpińskiego. Wtedy, jeśli $\kappa = max\{|L|, |S|\}$ jest regularną liczbą kardynalną, to $|L| = |S| = \kappa$.*

**Twierdzenie (M., Rałowski, Żeberski 2017)**

*Załóżmy, że $\mathfrak{c}$ jest regularną liczbą kardynalną i niech $t_0 \in \{s_0, m_0, l_0, cl_0\}$. Wtedy dla każdego uogólnionego zbioru Łuzina $L$ i uogólnionego zbioru Sierpińskiego $S$ zachodzi $L + S \in t_0$.*

### Twierdzenie (M., Rałowski, Żeberski 2017)

*Załóżmy, że $\mathfrak{c}$ jest regularną liczbą kardynalną i niech $t_0 \in \{s_0, m_0, l_0, cl_0\}$. Wtedy dla każdego uogólnionego zbioru Łuzina $L$ i uogólnionego zbioru Sierpińskiego $S$ zachodzi $L + S \in t_0$.*

### Dowód.

- Niech $L$ będzie uogólnionym zbiorem Łuzina, a $S$ uogólnionym zbiorem Sierpińskiego. Jeśli $|L + S| < \mathfrak{c}$, to nie mamy nic do roboty. W przeciwnym razie $|L| = |S| = \mathfrak{c}$ z regularności $\mathfrak{c}$.

## Twierdzenie (M., Rałowski, Żeberski 2017)

*Załóżmy, że $\mathfrak{c}$ jest regularną liczbą kardynalną i niech $t_0 \in \{s_0, m_0, l_0, cl_0\}$. Wtedy dla każdego uogólnionego zbioru Łuzina $L$ i uogólnionego zbioru Sierpińskiego $S$ zachodzi $L + S \in t_0$.*

## Dowód.

- Niech $L$ będzie uogólnionym zbiorem Łuzina, a $S$ uogólnionym zbiorem Sierpińskiego. Jeśli $|L + S| < \mathfrak{c}$, to nie mamy nic do roboty. W przeciwnym razie $|L| = |S| = \mathfrak{c}$ z regularności $\mathfrak{c}$.
- Niech $t_0 = m_0$ i niech $T$ będzie drzewem Millera. Niech $T' \subseteq T$ i $G$ będą zbiorami wynikającymi z Lematu. Wtedy dla $A = -G$ i $B = ([T'] + G)^c$ zachodzi $[T'] \subseteq (A + B)^c$ oraz:

  $$L + S = (L \cap A) \cup (L \cap A^c) + (S \cap B) \cup (S \cap B^c).$$

  Z tego wynika, że $|[T'] \cap L + S| < \mathfrak{c}$, zatem znajdziemy poddrzewo Millera $T'' \subseteq T'$, dla którego $[T''] \cap (L + S) = \emptyset$.

□

## Dziękuję za uwagę!

M. Michalski, R. Rałowski, Sz. Żeberski, Nonmeasurable sets and unions with respect to tree ideals, arXiv:1712.05212