Zbiory, które można odsunąć od zbiorów ustalonej rodziny

Grażyna Horbaczewska, Sebastian Lindner
Uniwersytet Łódzki

Konopnica, 24 czerwca 2018

Operacja $*$.

$(X,+)$ - grupa abelowa, $A, B \subset X$,
$A+B := \{a+b : a \in A, b \in B\}$, $-A := \{-a : a \in A\}$,
$A + x := A + \{x\}$ for $x \in X$.

Definicja

Dla $\mathcal{F} \subset P(X)$ określmy

$$\mathcal{F}^* := \{A \subset X : \forall_{F \in \mathcal{F}}\ A + F \neq X\}.$$

Równoważnie: $\mathcal{F}^* := \{A \subset X : \forall_{F \in \mathcal{F}}\ \exists_{x \in X}\ (x - A) \cap F = \emptyset\}$.

J. Pawlikowski, M. Sabok, *Two Stars*, Arch. Math. Logic 47, 2008.

Stwierdzenie

Niech $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ będą dowolnymi rodzinami podzbiorów X. Wówczas

- $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}^* \Leftrightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}^*$,
- $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^{**}$,
- $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}^* \subset \mathcal{G}^*$,
- $\mathcal{F}^*$ jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia i zamknięta ze względu na branie podzbiorów,
- $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{***} = \mathcal{F}^{*****}$ itd.

J. Pawlikowski, M. Sabok, *Two Stars*, Arch. Math. Logic 47, 2008.

Twierdzenie

Dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset P(X)$ następujące warunki są równoważne:

- $\forall_{A \notin \mathcal{F}} \ (\mathcal{F} \cup \{A\})^* \neq \mathcal{F}^*$,
- $\mathcal{F}^{**} = \mathcal{F}$.

Wniosek

Dla dowolnej rodziny $\mathcal{F} \subset P(X)$ rodzina $\mathcal{F}^{**}$ jest największym (w sensie inkluzji) elementem klasy $\{\mathcal{G} \subset P(X) : \mathcal{G}^* = \mathcal{F}^*\}$.

Twierdzenie

$\mathcal{F}in^*$ jest sumą wszystkich właściwych, odpornych na przesunięcia ideałów podzbiorów X

Twierdzenie

$\mathcal{C}ount^*$ jest sumą wszystkich właściwych, odpornych na przesunięcia $\sigma-$ideałów podzbiorów X.

Na prostej przedział $[0,1] \in \mathcal{F}in^* \setminus \mathcal{C}ount^*$.

Klasyczne twierdzenie GMS

$\mathcal{K}$ - σ-ideał zbiorów pierwszej kategorii,
$\mathcal{SMZ}$ - σ-ideał zbiorów silnej miary zero.

Zbiór $E \subset \mathbb{R}$ jest silnej miary zero, jeżeli dla dowolnego ciągu liczb dodatnich $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje ciąg przedziałów $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pokrywający zbiór E i taki, że $m(I_n) \leqslant \epsilon_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Galvin F., Mycielski J., Solovay R. M., *Strong measure zero sets*, Notices Am. Math. Soc. 26(3), 1979, Abstract A-280

$$\mathcal{K}^* = \mathcal{SMZ}.$$

Klasyczne twierdzenie GMS

$\mathcal{K}$ - σ-ideał zbiorów pierwszej kategorii,
$\mathcal{SMZ}$ - σ-ideał zbiorów silnej miary zero.

Zbiór $E \subset \mathbb{R}$ jest silnej miary zero, jeżeli dla dowolnego ciągu liczb dodatnich $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje ciąg przedziałów $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pokrywający zbiór E i taki, że $m(I_n) \leqslant \epsilon_n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

Galvin F., Mycielski J., Solovay R. M., *Strong measure zero sets*, Notices Am. Math. Soc. 26(3), 1979, Abstract A-280

$$\mathcal{K}^* = \mathcal{SMZ}.$$

$$\mathcal{K}^* = \mathcal{SMZ}.$$

Borel E., *Sur la classification des ensembles de mesure nulle*, Bull. Soc. Math. France, 47, 1919.

Hipoteza Borela (BC): $\mathcal{SMZ} = \mathcal{C}ount.$

Lusin N., *Théorie des fonctions*, CRAS Paris (1958) 1914.

Przy założeniu CH: $\mathcal{SMZ} \setminus \mathcal{C}ount \neq \emptyset.$

Laver R.,*On the consistency of the Borel Conjecture*,Acta Math.137 (3-4), 1976.

Istnieje model ZFC, w którym: $\mathcal{K}^* = \mathcal{C}ount.$

W ZFC: $$\mathcal{K} \subset \mathcal{SMZ}^* \subset \mathcal{C}ount^*.$$

$$\mathcal{K} \neq \mathcal{C}ount^*.$$

Przy założeniu CH

$$\mathcal{K} = \mathcal{SMZ}^*.$$

Definicja

Powiemy, że ideał $\mathcal{J} \subset P(X)$ ma bazę mocy continuum jeżeli istnieje rodzina $\mathcal{F} \subset \mathcal{J}$ mocy continuum taka, że dowolny zbiór $I \in \mathcal{J}$ ma nadzbiór w rodzinie $\mathcal{F}$.

Twierdzenie

(CH) Jeżeli σ-ideał $\mathcal{J} \subset P(\mathbb{R})$ ma bazę mocy continuum i jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia i odbicia, to

$$(\mathcal{J} \cup \{A\})^* \subsetneq \mathcal{J}^*.$$

Dowód wykorzystuje z niewielkimi zmianami konstrukcję z pracy

T. Weiss, *Properties of the intersection ideal $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ revisited*, Bulletin Polish Acad. Sci. Math. 65, 2017

Wniosek

(CH) Jeżeli σ-ideał $\mathcal{J} \subset P(\mathbb{R})$ ma bazę mocy continuum i jest niezmienniczy ze względu na przesunięcia i odbicia, to

$$\mathcal{J}^{**} = \mathcal{J}.$$

Wniosek

(CH)

$$\mathcal{K} = \mathcal{SMZ}^{*}.$$

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset P(\mathbb{R})$
$\mathcal{A} + \mathcal{B} := \{A + B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$,
$\mathcal{A} \downarrow := \{B \subset \mathbb{R} : \exists_{A \in \mathcal{A}}\ A \supset B\}$.
Łatwo zauważyć, że jeżeli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są σ-ideałami, wówczas też $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \downarrow$ jest σ-ideałem.

Zdefiniujmy

$$\mathcal{O} := (\mathcal{K} + \mathcal{SMZ}) \downarrow .$$

$\mathcal{O}$ jest σ-ideałem niezmienniczym ze względu na przesunięcia.

$$\mathcal{C}ount \subset \mathcal{O}^*.$$

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}^* \subset \mathcal{K}^* = \mathcal{SMZ}.$$

(CH) $\qquad \mathcal{SMZ} \subset \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}^* \subset \mathcal{SMZ}^* = \mathcal{K}$

(CH) $\qquad \mathcal{C}ount \subset \mathcal{O}^* \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{SMZ}.$

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset P(\mathbb{R})$
$\mathcal{A} + \mathcal{B} := \{A + B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$,
$\mathcal{A} \downarrow := \{B \subset \mathbb{R} : \exists_{A \in \mathcal{A}}\ A \supset B\}$.
Łatwo zauważyć, że jeżeli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są σ-ideałami, wówczas też $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \downarrow$ jest σ-ideałem.

Zdefiniujmy

$$\mathcal{O} := (\mathcal{K} + \mathcal{SMZ}) \downarrow .$$

$\mathcal{O}$ jest σ-ideałem niezmienniczym ze względu na przesunięcia.

$$\mathcal{C}ount \subset \mathcal{O}^*.$$

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{O} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{O}^* \subset \mathcal{K}^* = \mathcal{SMZ}.$$

(CH) $\quad \mathcal{SMZ} \subset \mathcal{O} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{O}^* \subset \mathcal{SMZ}^* = \mathcal{K}$

(CH) $\quad \mathcal{C}ount \ \subset \ \mathcal{O}^* \ \subset \ \mathcal{K} \cap \mathcal{SMZ}.$

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset P(\mathbb{R})$
$\mathcal{A} + \mathcal{B} := \{A + B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$,
$\mathcal{A} \downarrow := \{B \subset \mathbb{R} : \exists_{A \in \mathcal{A}}\ A \supset B\}$.
Łatwo zauważyć, że jeżeli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są σ-ideałami, wówczas też $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \downarrow$ jest σ-ideałem.

Zdefiniujmy

$$\mathcal{O} := (\mathcal{K} + \mathcal{SMZ}) \downarrow .$$

$\mathcal{O}$ jest σ-ideałem niezmienniczym ze względu na przesunięcia.

$$\mathcal{C}ount \subset \mathcal{O}^*.$$

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}^* \subset \mathcal{K}^* = \mathcal{SMZ}.$$

(CH) $\quad \mathcal{SMZ} \subset \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}^* \subset \mathcal{SMZ}^* = \mathcal{K}$

(CH) $\quad \mathcal{C}ount \subset \mathcal{O}^* \subset \mathcal{K} \cap \mathcal{SMZ}.$

$\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset P(\mathbb{R})$
$\mathcal{A} + \mathcal{B} := \{A + B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$,
$\mathcal{A} \downarrow := \{B \subset \mathbb{R} : \exists_{A \in \mathcal{A}}\ A \supset B\}$.
Łatwo zauważyć, że jeżeli $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ są σ-ideałami, wówczas też $(\mathcal{A} + \mathcal{B}) \downarrow$ jest σ-ideałem.

Zdefiniujmy

$$\mathcal{O} := (\mathcal{K} + \mathcal{SMZ}) \downarrow .$$

$\mathcal{O}$ jest σ-ideałem niezmienniczym ze względu na przesunięcia.

$$\mathcal{C}ount \subset \mathcal{O}^*.$$

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{O} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{O}^* \subset \mathcal{K}^* = \mathcal{SMZ}.$$

(CH) $$\mathcal{SMZ} \subset \mathcal{O} \qquad \Rightarrow \qquad \mathcal{O}^* \subset \mathcal{SMZ}^* = \mathcal{K}$$

(CH) $$\mathcal{C}ount \ \subset \ \mathcal{O}^* \ \subset \ \mathcal{K} \cap \mathcal{SMZ}.$$

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów $\mathbb{R}$. Powiemy, że $X \subset \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}$- addytywny jeżeli dla dowolnego $F \in \mathcal{F}$ zachodzi $X + F \in \mathcal{F}$.

Twierdzenie

Następujące dwa warunki są równoważne:

- $P \in \mathcal{O}^*$,
- P jest $\mathcal{SMZ}$-addytywny

a warunek

- P jest $\mathcal{K}$-addytywny (meager-additive)

jest silniejszy, niż tamte dwa..
Przy założeniu CH wszystkie trzy powyższe warunki są równoważne.

O. Zindulka, *Strong measure zero and meager-additive sets through the prism of fractal measures*

Wniosek

$\mathcal{O}^*$ jest σ-ideałem.

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów $\mathbb{R}$. Powiemy, że $X \subset \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}$- addytywny jeżeli dla dowolnego $F \in \mathcal{F}$ zachodzi $X + F \in \mathcal{F}$.

Twierdzenie

Następujące dwa warunki są równoważne:

- $P \in \mathcal{O}^*$,
- P jest $\mathcal{SMZ}$-addytywny

a warunek

- P jest $\mathcal{K}$-addytywny (meager-additive)

jest silniejszy, niż tamte dwa..
Przy założeniu CH wszystkie trzy powyższe warunki są równoważne.

O. Zindulka, *Strong measure zero and meager-additive sets through the prism of fractal measures*

Wniosek

$\mathcal{O}^*$ jest σ-ideałem.

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów $\mathbb{R}$. Powiemy, że $X \subset \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}$- addytywny jeżeli dla dowolnego $F \in \mathcal{F}$ zachodzi $X + F \in \mathcal{F}$.

Twierdzenie

Następujące dwa warunki są równoważne:

- $P \in \mathcal{O}^*$,
- P jest $\mathcal{SMZ}$-addytywny

a warunek

- P jest $\mathcal{K}$-addytywny (meager-additive)

jest silniejszy, niż tamte dwa..
Przy założeniu CH wszystkie trzy powyższe warunki są równoważne.

O. Zindulka, *Strong measure zero and meager-additive sets through the prism of fractal measures*

Wniosek

$\mathcal{O}^*$ jest σ-ideałem.

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów $\mathbb{R}$. Powiemy, że $X \subset \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}$- addytywny jeżeli dla dowolnego $F \in \mathcal{F}$ zachodzi $X + F \in \mathcal{F}$.

Twierdzenie

Następujące dwa warunki są równoważne:

- $P \in \mathcal{O}^*$,
- P jest $\mathcal{SMZ}$-addytywny

a warunek

- P jest $\mathcal{K}$-addytywny (meager-additive)

jest silniejszy, niż tamte dwa..
Przy założeniu CH wszystkie trzy powyższe warunki są równoważne.

O. Zindulka, *Strong measure zero and meager-additive sets through the prism of fractal measures*

Wniosek

$\mathcal{O}^*$ jest σ-ideałem.

Niech $\mathcal{F}$ będzie rodziną podzbiorów $\mathbb{R}$. Powiemy, że $X \subset \mathbb{R}$ jest $\mathcal{F}$- addytywny jeżeli dla dowolnego $F \in \mathcal{F}$ zachodzi $X + F \in \mathcal{F}$.

Twierdzenie

Następujące dwa warunki są równoważne:

- $P \in \mathcal{O}^*$,
- P jest $\mathcal{SMZ}$-addytywny

a warunek

- P jest $\mathcal{K}$-addytywny (meager-additive)

jest silniejszy, niż tamte dwa..
Przy założeniu CH wszystkie trzy powyższe warunki są równoważne.

O. Zindulka, *Strong measure zero and meager-additive sets through the prism of fractal measures*

Wniosek

$\mathcal{O}^*$ jest σ-ideałem.

Lustrzany przypadek

$$\mathcal{SM} := \mathcal{N}^*,$$

gdzie $\mathcal{N}$ - σ-ideał zbiorów miary zero.

Wniosek

(CH)

$$\mathcal{N} = \mathcal{SM}^*.$$

Lustrzany przypadek

$$\mathcal{P} := (\mathcal{N} + \mathcal{SM}) \downarrow$$

(CH)

$$\mathcal{C}ount \subset \mathcal{P}^* \subset \mathcal{N} \cap \mathcal{SM}.$$

Twierdzenie

Następujące dwa warunki są równoważne:

- $P \in \mathcal{P}^*$,
- P jest $\mathcal{SM}$-addytywny

a warunek

- P is $\mathcal{N}$-addytywny (null-additive)

jest silniejszy, niż tamte dwa.
Przy założeniu CH wszystkie trzy warunki są równoważne.

Lustrzany przypadek

$$\mathcal{P} := (\mathcal{N} + \mathcal{SM}) \downarrow$$

(CH)

$$\mathcal{C}ount \subset \mathcal{P}^* \subset \mathcal{N} \cap \mathcal{SM}.$$

Twierdzenie

Następujące dwa warunki są równoważne:

- $P \in \mathcal{P}^*$,
- P jest $\mathcal{SM}$-addytywny

a warunek

- P is $\mathcal{N}$-addytywny (null-additive)

jest silniejszy, niż tamte dwa.
Przy założeniu CH wszystkie trzy warunki są równoważne.

Saharon Shelah *Every null-additive set is meager-additive* Israel J. Math. (1995) 89: 357.

https://doi.org/10.1007/BF02808209

(wyniki osiągnięte w przestrzeni ${}^{\omega}2$.)

- Każdy zbiór $\mathcal{N}$-addytywny jest $\mathcal{K}$-addytywny,
- Z CH wynika istnienie nieprzeliczalnego zbioru $\mathcal{N}$-addytywnego.

Dziękuję