Zbiory niemierzalne względem ideałów definiowanych przez drzewa

Robert Rałowski, Szymon Żeberski

Politechnika Wrocławska

Konopnica  20-21 maja 2017

3 Warsztaty z Funkcji Rzeczywistych

Definicja ideału s_0

$A \in P(\mathbb{R})$ należy do ideału s_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall P \in Perf(\mathbb{R}))(\exists Q \in Perf(\mathbb{R}))\ Q \subseteq P \wedge Q \cap A = \emptyset.$$

Definicja s-mierzalności

$A \in P(\mathbb{R})$ jest s-mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(\forall P \in Perf(\mathbb{R}))(\exists Q \in Perf(\mathbb{R}))\ Q \subseteq P \wedge (Q \subseteq A \vee Q \cap A = \emptyset).$$

$Perf(\mathbb{R})$ oznacza rodzinę niepustych doskonałych podzbiorów $\mathbb{R}$.

Marczewski (Szpilrajn) E., Sur une classe de fonctions de W. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles, Fund. Math. 24 (1935), 17–34.

Definicje drzew

Drzewo $T \subseteq \omega^{<\omega}$ nazywamy

- drzewem Sacksa lub drzewem doskonałym jeśli dla dowolnego $t \in T$ istnieje taki $s \in T$, że $t \subseteq s$ oraz $|\{n \in \omega : s^\frown n \in T\}| \geq 2$.
- drzewem Lavera jeśli istnieje pień $s \in T$ oraz dla każdego $t \in T$ jeśli $s \subseteq t$, to t rozszczepia się nieskończenie, i.e. $\{n \in \omega : s^\frown n \in T\}$ jest nieskończony.
- zupełnym drzewem Lavera jeśli dowolne $t \in T$ rozszczepia się nieskończenie.
- drzewem Millera jeśli istnieje pień $s \in T$ oraz dla każdego $t \in T$ jeśli $s \subseteq t$, to istnieje takie t', że $t \subseteq t'$ oraz t' rozszczepia się nieskończenie.

- $\mathbb{S}$ - rodzina wszystkich drzew Sacksa.
- $\mathbb{L}$ - rodzina wszystkich drzew Lavera.
- $\mathbb{CL}$ - rodzina wszystkich zupełnych drzew Lavera.
- $\mathbb{M}$ - rodzina wszystkich drzew Millera.

$$\mathbb{CL} \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{M} \subseteq \mathbb{S}$$

- $\mathbb{S}$ - rodzina wszystkich drzew Sacksa.
- $\mathbb{L}$ - rodzina wszystkich drzew Lavera.
- $\mathbb{CL}$ - rodzina wszystkich zupełnych drzew Lavera.
- $\mathbb{M}$ - rodzina wszystkich drzew Millera.

$$\mathbb{CL} \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{M} \subseteq \mathbb{S}$$

Niech $T \subseteq \omega^{<\omega}$ będzie drzewem.

$$[T] = \{x \in \omega^\omega : (\forall n \in \omega)\ x \restriction n \in T\}.$$

Definicja

Let $\mathbb{T}$ be a family of trees.

- (drzewiasty ideał t_0) $A \in P(\omega^\omega)$ należy do t_0 jeśli

$$(\forall P \in \mathbb{T})(\exists Q \in \mathbb{T})\ Q \subseteq P \wedge [Q] \cap A = \emptyset.$$

- (t-mierzalność) $A \in P(\omega^\omega)$ jest t-mierzalny jeśli

$$(\forall P \in \mathbb{T})(\exists Q \in \mathbb{T})\ Q \subseteq P \wedge ([Q] \subseteq A \vee [Q] \cap A = \emptyset).$$

Definicja

Let $\mathbb{T}$ be a family of trees.

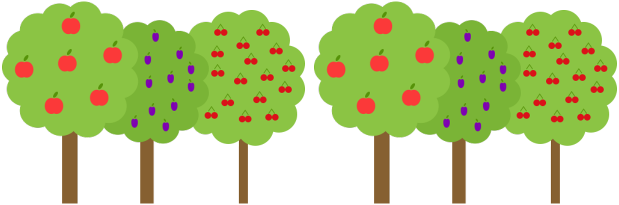
- (drzewiasty ideał t_0) $A \in P(\omega^\omega)$ należy do t_0 jeśli
$$(\forall P \in \mathbb{T})(\exists Q \in \mathbb{T})\ Q \subseteq P \wedge [Q] \cap A = \emptyset.$$
- (t-mierzalność) $A \in P(\omega^\omega)$ jest t-mierzalny jeśli
$$(\forall P \in \mathbb{T})(\exists Q \in \mathbb{T})\ Q \subseteq P \wedge ([Q] \subseteq A \vee [Q] \cap A = \emptyset).$$

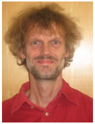
Uwaga

- Rodziny s_0, l_0, m_0 stanowią σ-ideały.
- Rodzina cl_0 nie jest σ-ideałem.

Twierdzenie Brendle

Jeśli $i_0, j_0 \in \{s_0, l_0, m_0\}$ oraz $i_0 \neq j_0$, to $i_0 \not\subseteq j_0$.





Brendle J., Strolling trough paradise, Fund. Math. 148 (1995), 1-25.

Jak zrobić $A \in i_0 \setminus j_0$?

- Znaleźć gęstą rodzinę $\{I_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \mathbb{I}$.
- Dla dowolnego $J \in \mathbb{J}$ znaleźć obiekt $O_J \subseteq [J]$ tak, by $O_J \setminus \bigcup_{\alpha \in A} [I_\alpha] \neq \emptyset$ dla dowolnego A, $|A| < \mathfrak{c}$.
- (w praktyce) $O_J \cap [I_\alpha]$ mały.

Jak zrobić $A \in i_0 \setminus j_0$?

- Znaleźć gęstą rodzinę $\{I_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\} \subseteq \mathbb{I}$.
- Dla dowolnego $J \in \mathbb{J}$ znaleźć obiekt $O_J \subseteq [J]$ tak, by $O_J \setminus \bigcup_{\alpha \in A}[I_\alpha] \neq \emptyset$ dla dowolnego A, $|A| < \mathfrak{c}$.
- (w praktyce) $O_J \cap [I_\alpha]$ mały.

Dalej indukcja...

- $x_\alpha \in O_{J_\alpha} \setminus \bigcup_{\xi \leq \alpha}[I_\xi] \subseteq [J_\alpha] \setminus \bigcup_{\xi \leq \alpha}[I_\xi]$.
- $A = \{x_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

Zależności łatwe

$cl_0 \not\subseteq (l_0 \cup m_0 \cup s_0)$, bo $\mathbb{CL} \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{M} \subseteq \mathbb{S}$

Zależności łatwe

$cl_0 \not\subseteq (l_0 \cup m_0 \cup s_0)$, bo $\mathbb{CL} \subseteq \mathbb{L} \subseteq \mathbb{M} \subseteq \mathbb{S}$

Zależności mniej łatwe

- $m_0 \not\subseteq cl_0$.
- $s_0 \not\subseteq cl_0$.
- $l_0 \not\subseteq cl_0$?

Wnioski

Istnieje zbiór m-niemierzalny, który jest s-mierzalny.

....

Definicja $\mathcal{I}$-zbioru Łuzina

Niech $\mathcal{I} \subseteq P(\omega^\omega)$ będzie σ-ideałem. $L \subseteq \omega^\omega$ jest $\mathcal{I}$-zbiorem Łuzina, jeśli

$$(\forall X \in \mathcal{I})(|X \cap L| < |L|)$$

Twierdzenie Wohofskiego

Nie istnieje s_0-zbiór Łuzina.

Wohofsky W., There are no large sets which can be translated away from every Marczewski null set, WS2016 Hejnice, http://www.winterschool.eu/files/937...

Fact

- Nie istnieje l_0-zbiór Łuzina.
- Nie istnieje cl_0-zbiór Łuzina.
- Nie istnieje m_0-zbiór Łuzina.

Fact

- Nie istnieje l_0-zbiór Łuzina.
- Nie istnieje cl_0-zbiór Łuzina.
- Nie istnieje m_0-zbiór Łuzina.

Dowód, przypadek l_0

Dla dowolnego X mocy $\mathfrak{c}$ istnieje taki $A \subseteq X$, że $A \in l_0$ oraz $|A| = \mathfrak{c}$.

$(\forall X)(|X| = \mathfrak{c} \to (\exists A \subseteq X)(A \in l_0, \wedge |A| = \mathfrak{c}))$

- $X \notin l_0$, zatem istnieje takie $L \in \mathbb{L}$, że $|[L] \cap X| = \mathfrak{c}$.
- Ustalmy maksymalny antyłańcuch $\{L_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ drzew Lavera zawartych w L czyniący zadość warunkowi $|[L_\alpha] \cap X| = \mathfrak{c}$.
- Znajdujemy $a_\alpha \in X \setminus \bigcup_{\xi<\alpha}[L_\alpha]$.
- $A = \{a_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

$\square$

Definicja

Niech $A \subseteq \omega^\omega$.

- A jest zbiorem funkcji w końcu różnych (e.d.), jeśli $(\forall f, g \in A)(f \neq g \to (\forall^\infty n)(f(n) \neq g(n)))$.

Definicja

Niech $A \subseteq \omega^\omega$.

- A jest zbiorem funkcji w końcu różnych (e.d.), jeśli $(\forall f, g \in A)(f \neq g \to (\forall^\infty n)(f(n) \neq g(n)))$.
- A jest maksymalnym zbiorem funkcji w końcu różnych (m.e.d.), jeśli A jest maksymalnym w sensie inkluzji zbiorem e.d.

Definicja

Niech $A \subseteq \omega^\omega$.

- A jest zbiorem funkcji w końcu różnych (e.d.), jeśli $(\forall f, g \in A)(f \neq g \to (\forall^\infty n)(f(n) \neq g(n)))$.
- A jest maksymalnym zbiorem funkcji w końcu różnych (m.e.d.), jeśli A jest maksymalnym w sensie inkluzji zbiorem e.d.
- A jest rodziną dominującą, jeśli $(\forall f)(\exists a \in A)(\forall^\infty n)(f(n) \leq a(n))$.

Twierdzenie Rałowskiego

Założmy, że $\mathfrak{d} = \omega_1$. Wtedy istnieje m.e.d. zbiór $A \subseteq \omega^\omega$, który jest s-niemierzalny oraz zawiera rodzinę dominującą $A' \in [A]^{\omega_1}$.

s-niemierzealność można zastąpić l-niemierzalnością, cl-mniemierzalnością lub m-niemierzalnością.

- Rałowski R., Families of sets with nonmeasurable unions with respect to ideals defined by trees, Arch. Math. Logic 54 (2015), 649-658.
- Rałowski R., Dominating m.a.d. families in Baire space, RIMS Kôkyûroku No.1949 (2015), pp. 73-80.

Twierdzenie Rałowskiego

Załóżmy, że $\mathfrak{d} = \omega_1$. Wtedy istnieje m.e.d. zbiór $A \subseteq \omega^\omega$, który jest s-niemierzalny oraz zawiera rodzinę dominującą $A' \in [A]^{\omega_1}$.
s-niemierzealność można zastąpić l-niemierzalnością, cl-mniemierzalnością lub m-niemierzalnością.

Twierdzenie Rałowskiego

Jest relatywnie niesprzeczne z ZFC, że $\omega_1 < \mathfrak{d}$ oraz istnieje m.e.d zbiór $A \subseteq \omega^\omega$, który jest cl-niemierzalny oraz zawiera rodzinę dominującą $A' \in A^{\mathfrak{d}}$.

- Rałowski R., Families of sets with nonmeasurable unions with respect to ideals defined by trees, Arch. Math. Logic 54 (2015), 649-658.
- Rałowski R., Dominating m.a.d. families in Baire space, RIMS Kôkyûroku No.1949 (2015), pp. 73-80.

Wyciąg z dowodu

Startujemy z $V \models GCH$. Bierzemy zupełne drzewo Lavera $T \subseteq \omega^{<\omega}$, dla którego $[T]$ jest e.d..
Definiujemy forcing $(Q_T, \leq)$:
$p = (x_p, s_p^g, s_p^b, \mathcal{F}_p) \in Q_T$ jeśli

- $x_p \in \omega^{<\omega}$,
- s_p^g, s_p^b niepuste skończone poddrzewa T,
- $\mathcal{F}_p \in [\omega^\omega]^{<\omega}$,

Dla $t \in \omega^{<\omega}$ oraz niepustego skończonego drzewa$\tau \subseteq \omega^{<\omega}$

$$t \restriction \tau = \bigcup \{s \in \tau : s \subseteq t\}$$

Wyciąg z dowodu... definicja porządku

Niech $p = (x_p, s_p^g, s_p^b, \mathcal{F}_p) \in Q_T$ oraz $q = (x_q, s_q^g, s_q^b, \mathcal{F}_q) \in Q_T$.
$p \leq q$ jeśli

1. $x_q \subset x_p \wedge s_q^g \subseteq s_p^g \wedge s_q^b \subseteq s_p^b \wedge \mathcal{F}_q \subseteq \mathcal{F}_p$,
2. $(\forall t \in s_p^g)\ x_p \cap t \subseteq (t \restriction s_q^g) \cup x_q$,
3. $(\forall h \in \mathcal{F}_q)(\forall t \in dom(x_p) \setminus dom(x_q))\ h(t) \leq x_p(t)$.
4. $(\forall h \in \mathcal{F}_q)(\forall t \in s_p^b)\ t \cap h = (t \restriction s_q^b) \cap h$,
5. $(\forall h \in \mathcal{F}_q)(\forall t \in s_p^g)\ t \cap h = (t \restriction s_q^g) \cap h$.

$\square$

Twierdzenie

Istnieje m.e.d. zbiór $A \subseteq \omega^\omega$, który jest jednocześnie s-, l-, m-niemierzalny oraz zawiera rodzinę dominującą $A' \in [A]^{\mathfrak{d}}$.

Twierdzenie

Istnieje m.e.d. zbiór $A \subseteq \omega^\omega$, który jest jednocześnie s-, l-, m-niemierzalny oraz zawiera rodzinę dominującą $A' \in [A]^{\mathfrak{d}}$.

Dowód

- Istnieje e.d. dominująca rodzina $\mathcal{D} \subseteq (4\mathbb{N})^\omega$, $|\mathcal{D}| = \mathfrak{d}$.
- Wybierzmy e.d. drzewa
  - $S \subseteq (4\mathbb{N}+1)^{<\omega}$, $S \in \mathbb{S}$,
  - $M \subseteq (4\mathbb{N}+2)^{<\omega}$, $M \in \mathbb{M}$,
  - $L \subseteq (4\mathbb{N}+3)^{<\omega}$, $L \in \mathbb{L}$.

Dowód...

Niech

- $\mathbb{S}(S) = \{S_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$,
- $\mathbb{M}(M) = \{M_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$,
- $\mathbb{L}(L) = \{L_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$.

Dla $\alpha < \mathfrak{c}$ zdefiniujemy

$$w_\alpha = (a^s_\alpha, d^s_\alpha, x^s_\alpha, a^m_\alpha, d^m_\alpha, x^m_\alpha, a^l_\alpha, d^l_\alpha, x^l_\alpha)$$

spełniające warunki

1. $a^s_\alpha, d^s_\alpha \in S_\alpha$,
2. $\{a^s_\xi : \xi < \alpha\} \cap \{d^s_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$,
3. $\{a^s_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{x^s_\xi : \xi < \alpha\}$ jest e.d.,
4. $\forall^\infty n\ x^s_\alpha(n) = d^s_\alpha(n)$, ale $x^s_\alpha \neq d^s_\alpha$.
5. $\ldots$

Dowód...

$w_\alpha = (a^s_\alpha, d^s_\alpha, x^s_\alpha, a^m_\alpha, d^m_\alpha, x^m_\alpha, a^l_\alpha, d^l_\alpha, x^l_\alpha)$ spełniające warunki

1. $a^s_\alpha, d^s_\alpha \in S_\alpha$,
2. $\{a^s_\xi : \xi < \alpha\} \cap \{d^s_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$,
3. $\{a^s_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{x^s_\xi : \xi < \alpha\}$ jest e.d.,
4. $\forall^\infty n\ x^s_\alpha(n) = d^s_\alpha(n)$, ale $x^s_\alpha \neq d^s_\alpha$.
5. $a^m_\alpha, d^m_\alpha \in M_\alpha$,
6. $\{a^m_\xi : \xi < \alpha\} \cap \{d^m_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$,
7. $\{a^m_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{x^m_\xi : \xi < \alpha\}$ jest e.d.,
8. $\forall^\infty n\ x^m_\alpha(n) = d^m_\alpha(n)$, ale $x^m_\alpha \neq d^m_\alpha$.
9. $a^l_\alpha, d^l_\alpha \in L_\alpha$,
10. $\{a^l_\xi : \xi < \alpha\} \cap \{d^l_\xi : \xi < \alpha\} = \emptyset$,
11. $\{a^l_\xi : \xi < \alpha\} \cup \{x^l_\xi : \xi < \alpha\}$ jest e.d.,
12. $\forall^\infty n\ x^l_\alpha(n) = d^l_\alpha(n)$, ale $x^l_\alpha \neq d^l_\alpha$.

Dowód...

Wreszcie połóżmy

$$A_s = \{a_\alpha^s : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{x_\alpha^s : \alpha < \mathfrak{c}\},$$

$$A_m = \{a_\alpha^m : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{x_\alpha^m : \alpha < \mathfrak{c}\}$$

oraz

$$A_l = \{a_\alpha^l : \alpha < \mathfrak{c}\} \cup \{x_\alpha^l : \alpha < \mathfrak{c}\}.$$

Ostatecznie

$$\mathcal{A} \text{ jest m.e.d. rodziną zawierającą } \mathcal{D} \cup A_s \cup A_m \cup A_l.$$

$\square$

Dziękuję za uwagę!

Literatura

- Brendle J., Strolling trough paradise, Fund. Math. 148 (1995), 1-25.
- Marczewski (Szpilrajn) E., Sur une classe de fonctions de W. Sierpiński et la classe correspondante d'ensembles, Fund. Math. 24 (1935), 17–34.
- Rałowski R., Families of sets with nonmeasurable unions with respect to ideals defined by trees, Arch. Math. Logic 54 (2015), 649-658.
- Rałowski R., Dominating m.a.d. families in Baire space, RIMS Kôkyûroku No.1949 (2015), pp. 73-80.
- Wohofsky W., There are no large sets which can be translated away from every Marczewski null set, WS2016 Hejnice, `http://www.winterschool.eu/files/937...`