Operator związany z własnością Smitala

G. Horbaczewska, S. Lindner

Uniwersytet Łódzki

Definicje

Niech X będzie niepustym zbiorem, $\mathcal{F} \subset P(X) \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Definicje

Niech X będzie niepustym zbiorem, $\mathcal{F} \subset P(X) \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Powiemy, że zbiór $P \subset X$ jest *gęsty* względem rodziny $\mathcal{F}$ jeżeli $F \cap P \neq \emptyset$ dla dowolnego $F \in \mathcal{F}$. Niech $D(\mathcal{F})$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów gęstych względem $\mathcal{F}$.

Definicje

Niech X będzie niepustym zbiorem, $\mathcal{F} \subset P(X) \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Powiemy, że zbiór $P \subset X$ jest *gęsty* względem rodziny $\mathcal{F}$ jeżeli $F \cap P \neq \emptyset$ dla dowolnego $F \in \mathcal{F}$. Niech $D(\mathcal{F})$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów gęstych względem $\mathcal{F}$.

Niech $\mathcal{F}\uparrow$ oznacza rodzinę wszystkich nadzbiorów zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$.

Definicje

Niech X będzie niepustym zbiorem, $\mathcal{F} \subset P(X) \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{F} \neq \emptyset$.

Powiemy, że zbiór $P \subset X$ jest *gęsty* względem rodziny $\mathcal{F}$ jeżeli $F \cap P \neq \emptyset$ dla dowolnego $F \in \mathcal{F}$. Niech $D(\mathcal{F})$ oznacza rodzinę wszystkich zbiorów gęstych względem $\mathcal{F}$.

Niech $\mathcal{F}\uparrow$ oznacza rodzinę wszystkich nadzbiorów zbiorów z rodziny $\mathcal{F}$.

Rodziny $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ nazywamy *wzajemnie współpoczątkowymi* jeżeli

$$\forall_{F\in\mathcal{F}}\exists_{G\in\mathcal{G}}\ G \subset F \quad \wedge \quad \forall_{G\in\mathcal{G}}\exists_{F\in\mathcal{F}}\ F \subset G.$$

Własności operatora D

Theorem

Niech $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ - dowolne niepuste rodziny niepustych podzbiorów X.

(1) $\mathcal{G} \subset D(\mathcal{F}) \iff \mathcal{F} \subset D(\mathcal{G})$,

(2) $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow D(\mathcal{F}) \subset D(\mathcal{G})$,

(3) $(D(\mathcal{F}))\uparrow = D(\mathcal{F})$,

(4) $\mathcal{G}$ *i* $\mathcal{F}$ *są wzajemnie współpoczątkowe wtedy i tylko wtedy gdy* $D(\mathcal{G}) = D(\mathcal{F})$,

(5) $D(\mathcal{F}\uparrow) = D(\mathcal{F})$,

(6) $D^{(2)}F = \mathcal{F}\uparrow$,

(7) $D^{(n)}(F) = \begin{cases} D(\mathcal{F}) & \textit{gdy } n \textit{ nieparzyste}, \\ \mathcal{F}\uparrow & \textit{gdy } n \textit{ parzyste}. \end{cases}$

Własności operatora D

Definition

Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną rodziną niepustych zbiorów.

$$S^0(\mathcal{F}) = \{A \subset X \ : \ \forall_{F \in \mathcal{F}} \exists_{G \in \mathcal{F}} \ G \subset F \setminus A\}.$$

Własności operatora D

Definition

Niech $\mathcal{F}$ będzie dowolną rodziną niepustych zbiorów.

$$S^0(\mathcal{F}) = \{A \subset X \ : \ \forall_{F \in \mathcal{F}} \exists_{G \in \mathcal{F}} \ G \subset F \setminus A\}.$$

Theorem

(Por. [5], Theorem 1.1) Then

$$S^0(D(\mathcal{F})) = S^0(\mathcal{F}).$$

Twierdzenie Illanesa

Definition

Rodzina $\mathcal{F}$ niepustych zbiorów jest α*-rozkładalna* jeżeli istnieje rodzina mocy α parami rozłącznych zbiorów gęstych względem $\mathcal{F}$.

A. Illanes [3] udowodnił, że jeśli przestrzeń topologiczna jest *n*-rozkładalna dla dowolnego *n*, wówczas jest też $\aleph_0$-rozkładalna.

Twierdzenie Illanesa

Definition

Rodzina $\mathcal{F}$ niepustych zbiorów jest α-*rozkładalna* jeżeli istnieje rodzina mocy α parami rozłącznych zbiorów gęstych względem $\mathcal{F}$.

A. Illanes [3] udowodnił, że jeśli przestrzeń topologiczna jest n-rozkładalna dla dowolnego n, wówczas jest też $\aleph_0$-rozkładalna.

Example

Niech $X = \mathbb{N}$. Dla $m, n, t \in \mathbb{N}$ niech $m \sim_t n$ gdy $m \equiv n \mod t$. Niech

$$\mathcal{F} = \{[m]_{\sim_p} \ : \ m \in \mathbb{N}, p \text{ jest liczbą pierwszą}\}.$$

Wówczas dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ znajdzie się n rozłącznych podzbiorów $\mathcal{F}$, ale nie iestnieje parami rozłączna nieskończona podrodzina $\mathcal{F}$. Tak samo się rzecz ma dla rodziny $\mathcal{F}\!\uparrow$. Tym samym rodzina $D(\mathcal{F})$ jest n-rozkładalna dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ ale nie jest $\aleph_0$-rozkładalna.

Pytanie

Czy teza twierdzenie Illanesa jest prawdziwa dla dowolnej rodziny postaci $\mathcal{M} \setminus \mathcal{I}$, gdzie $\mathcal{M}$ jest dowolnym ciałem, a $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$ dowolnym ideałem?

- (Własność Steinhausa) Dla dowolnych $A, B \in \mathcal{L}$ miary dodatniej zbiór $A - B$ $(A + B)$ zawiera przedział.
- (Własność Smitala) Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}$ miary dodatniej i dowolnego zbioru gęstego D zbiór $A + D$ jest pełnej miary.

Operator DS

Niech $(X, +)$ będzie grupą abelową, $\mathcal{F} \subset P(X) \setminus \{\emptyset\}$, $\mathcal{I} \subset P(X)$ będzie dowolnym ideałem zbiorów. Zdefiniujmy

$$DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{F}) = \{D \subset X : (\forall F \in \mathcal{F})((F + D)' \in \mathcal{I})\}$$

Własności

Theorem

Niech $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ - dowolne niepuste rodziny niepustych podzbiorów X, $\mathcal{I}$ i $\mathcal{J}$ - ideały w X. Wówczas

(1) $\mathcal{G} \subset DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{F}) \iff \mathcal{F} \subset DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{G})$,

(2) $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Longrightarrow DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{F}) \subset DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{G})$, $\mathcal{I} \subset \mathcal{J} \Longrightarrow DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{F}) \subset DS_{\mathcal{J}}(\mathcal{F})$,

(3) $(DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{F}))\uparrow = (DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{F})) = (DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{F}\uparrow))$

(4) *jeśli choć jedna z rodzin $\mathcal{F}$ lub $\mathcal{I}$ jest niezmiennicza ze względu na przesunięcia, to $DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{F})$ też jest.*

(5) $DS_{\mathcal{I}}^{(n+2)}(\mathcal{F}) = DS_{\mathcal{I}}^{(n)}(\mathcal{F})$ *dla* $n \geq 1$.

Operator DS jest w pewnym sensie uogólnieniem operatora D.

Theorem

Niech $(X,+)$ *będzie grupą abelową,* $\mathcal{F}$ *rodziną niezmienniczą ze względu na przesunięcia w* $(X,+)$, $\mathcal{E}=\{\emptyset\}$. *Wówczas*

$$DS_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})=D(\mathcal{F}).$$

Kolejne twierdzenie wyraża związek pomiędzy własnościami Steinhausa i Smitala.

Kolejne twierdzenie wyraża związek pomiędzy własnościami Steinhausa i Smitala.

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenie: $\widetilde{\mathcal{F}} = \{F_1 - F_2 : F_1, F_2 \in \mathcal{F}\}$.

Kolejne twierdzenie wyraża związek pomiędzy własnościami Steinhausa i Smitala.

Wprowadźmy dodatkowe oznaczenie: $\widetilde{\mathcal{F}} = \{F_1 - F_2 : F_1, F_2 \in \mathcal{F}\}$.

Theorem

Niech X będzie grupą abelową, $\mathcal{M}$ σ-ciałem podzbiorów X, $\mathcal{I} \subset \mathcal{M}$ σ-ideałem. Niech $P \subset X$ - zbiór przeliczalny. Wówczas $P \in DS_{\mathcal{I}}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{I})$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P \in D(\widetilde{\mathcal{M} \setminus \mathcal{I}})$.

Przypadek grupy semi-topologicznej

Niech $(X, +)$ będzie grupą abelową z topologią τ. Strukturę $(X, +, \tau)$ nazywamy

- grupą semi-topologiczną gdy τ jest niezmiennicza ze względu na operacje grupy,
- grupą topologiczną, gdy operacje grupy są ciągłe względem τ.

Łatwo zauważyć, że każda grupa topologiczna jest semi-topologiczna, i że na to, aby grupa semi-topologiczna była topologiczna, wystarcza ciągłość operacji "+".

Theorem

Niech $(X, +, \tau)$ będzie grupą semi-topologiczną. Niech $\mathcal{ND}$ oznacza ideał zbiorów nigdziegęstych względem τ. NWSR:

(1) *operacja $''+'' : X \times X \to X$ jest quasi-ciągła,*

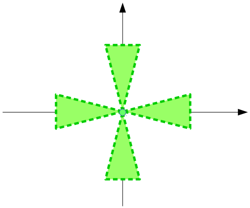
(2) *rodzina $\widetilde{\tau*}$ jest współpoczątkowa z $\tau*$,*

(3) $DS_{\mathcal{ND}}(\tau*) = D(\tau*)$.

Przykład

Niech

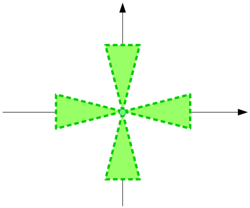
$$MC(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (|y| < |x/2| < r) \vee (|x| < |y/2| < r) \vee (x = y = 0)\}.$$



Topologia τ_{MC} generowana przez rodzinę $\{MC(r) + (x,y) \ : \ x, y, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ jest nazywana topologią krzyża maltańskiego. Łatwo sprawdzić, że przestrzeń R^2 wyposażona w tę topologię nie jest grupą topologiczną, lecz jest grupą semi-topologiczną i spełnia założenia ostatniego twierdzenia. Tym samym operacja dodawania jest tam quasi-ciągła.

Przykład

Niech



$$MC(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (|y| < |x/2| < r)$$
$$\vee (|x| < |y/2| < r) \vee (x = y = 0)\}.$$

Topologia τ_{MC} generowana przez rodzinę $\{MC(r) + (x,y) \ : \ x, y, r \in \mathbb{R}, r > 0\}$ jest nazywana topologią krzyża maltańskiego. Łatwo sprawdzić, że przestrzeń R^2 wyposażona w tę topologię nie jest grupą topologiczną, lecz jest grupą semi-topologiczną i spełnia założenia ostatniego twierdzenia. Tym samym operacja dodawania jest tam quasi-ciągła.

Dziękujemy prof. Tarasowi Banakhowi za wskazanie nam tego przykładu.

Klasyczne przykłady i pytanie

Example

$$DS_{\mathcal{N}}(\mathcal{L} \setminus \mathcal{N}) = D(\tau_{nat}).$$

$$DS_{\mathcal{M}_0}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0) = D(\tau_{nat}).$$

Z wspomnianego wcześniej twierdzenia wynika, że

$$(\mathcal{L} \setminus \mathcal{N})\!\uparrow \subset DS^{(2)}_{\mathcal{N}}(\mathcal{L} \setminus \mathcal{N}) = DS_{\mathcal{N}}(D(\tau_{nat})).$$

Pytanie, czy $(\mathcal{L} \setminus \mathcal{N})\!\uparrow = DS^{(2)}_{\mathcal{N}}(\mathcal{L} \setminus \mathcal{N})$?
I podobnie, czy $(\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0)\!\uparrow = DS^{(2)}_{\mathcal{M}_0}(\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_0)$?

Odpowiedź

Negatywnej odpowiedzi dostarczyła prof. M. Filipczak:

Example

Niech H będzie bazą Hamela na $\mathbb{R}$ taką, że $1 \in H$. Niech A będzie otoczką liniową zbioru $H \setminus \{1\}$. Niech $C = A \triangle (-\infty, 0]$. Wówczas C nie jest mierzalny w sensie Lebesgue'a, nie ma własności Baire'a, ale dla dowolnego zbioru gęstego D dopełnienie zbioru $C + D$ składa się z co najwyżej dwóch punktów.

Literatura

A. Bartoszewicz, M. Filipczak, T. Natkaniec, *On Smital properties,* Topology Appl. 158 (2011), 2066-2075, doi 10.1016/j.topol.2011.06.044.

G. Horbaczewska, S. Lindner *Resolvability of measurable spaces,*. Bulletin of the Australian Mathematical Society, 94(1), 70-79. doi:10.1017/S0004972715001458

A. Illanes *Finite and ω-resolvability* Proc. Amer. Math. Soc., 124 (1996), pp. 1243-1246

Jiménez R., Malykhin V.I., *Structure resolvability* Comment. Math. Univ. Carolin. 39,2 (1998), 379-387.

A. Nowik, *Marczewski–Burstin representations vs. Bernstein and dense subsets* Dem. Math. Vol. 49 No 4 2016 pp. 372 - 377

M. Balcerzak, A. Bartoszewicz, K. Ciesielski *On Marczewski-Burstin Representations of Certain Algebras of Sets.* Real Anal. Exchange 26 (2000), no. 2, 581–592.

Dziękuję