Mnogościowe sumy regularnych rodzin małych zbiorów

Robert Rałowski i Szymon Żeberski
Politechnika Wrocławska

Konopnica, 21 Maja 2017

Definicje

X - przestrzeń polska, $I \subseteq \mathscr{P}(X)$ rodzina zbiorów taka że:

- I is σ-ideał z bazą borelowską,
- I zawiera wszystkie singletony,

wtedy (X, I) - ideałowa przestrzeń polska
$\mathcal{B}_+(I) = Borel(X) \setminus I$ zbiory borelowskie I-dodatnie na X,
$Perf(X)$ zbiory doskonałe na X.

Definicje

X - przestrzeń polska, $I \subseteq \mathscr{P}(X)$ rodzina zbiorów taka że:

- I is σ-ideał z bazą borelowską,
- I zawiera wszystkie singletony,

wtedy (X, I) - ideałowa przestrzeń polska
$\mathcal{B}_+(I) = Borel(X) \setminus I$ zbiory borelowskie I-dodatnie na X,
$Perf(X)$ zbiory doskonałe na X.

Definicje

X - przestrzeń polska, $I \subseteq \mathscr{P}(X)$ rodzina zbiorów taka że:

- I is σ-ideał z bazą borelowską,
- I zawiera wszystkie singletony,

wtedy (X, I) - ideałowa przestrzeń polska
$\mathcal{B}_+(I) = Borel(X) \setminus I$ zbiory borelowskie I-dodatnie na X,
$Perf(X)$ zbiory doskonałe na X.

Definicje

X - przestrzeń polska, $I \subseteq \mathscr{P}(X)$ rodzina zbiorów taka że:

- I is σ-ideał z bazą borelowską,
- I zawiera wszystkie singletony,

wtedy (X, I) - ideałowa przestrzeń polska

$\mathcal{B}_+(I) = Borel(X) \setminus I$ zbiory borelowskie I-dodatnie na X,

$Perf(X)$ zbiory doskonałe na X.

Definicje

X - przestrzeń polska, $I \subseteq \mathscr{P}(X)$ rodzina zbiorów taka że:

- I is σ-ideał z bazą borelowską,
- I zawiera wszystkie singletony,

wtedy (X, I) - ideałowa przestrzeń polska
$\mathcal{B}_+(I) = Borel(X) \setminus I$ zbiory borelowskie I-dodatnie na X,
$Perf(X)$ zbiory doskonałe na X.

Współczynniki kardynalne

Niech (X, I) - ideałowa przestrzeń polska, $\mathscr{F} \subset I$, wtedy

$$cov(\mathcal{F}) = min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subset \mathcal{F} \wedge \bigcup \mathscr{A} = X\}$$

$$cov_h(\mathcal{F}) = min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subset \mathcal{F} \wedge (\exists B \in \mathcal{B}_+(I)) \bigcup \mathscr{A} = B\}$$

$$cof(I) = min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subseteq I \wedge (\forall A \in I)(\exists B \in \mathscr{B})\ A \subseteq B\}$$

$$Cof(I) = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subseteq \mathcal{B}_+(I) \wedge (\forall A \in \mathcal{B}_+(I))(\exists B \in \mathscr{B})(B \subseteq A)\}$$

$\mathscr{N}$ σ-ideał zbiorów miary zero na $\mathbb{R}$ (ewentualnie $[0,1]$, 2^ω)
$\mathscr{M}$ σ-ideał zbiorów meager w X
$cov(\mathscr{M}) = cov_h(\mathscr{M})$, $cov(\mathscr{N}) = cov_h(\mathscr{N})$.

Twierdzenie (Cichoń-Kamburelis-Pawlikowski)

Jeżeli I jest c.c.c. σ-ideałem z bazą borelowską na X, to $cof(I) = Cof(I)$

J. Cichoń, A. Kamburelis, J. Pawlikowski, On dense subsets of the measure algebra, PAMS, Vol. 84, No 1, 1985, p. 142-146

Współczynniki kardynalne

Niech (X, I) - ideałowa przestrzeń polska, $\mathscr{F} \subset I$, wtedy

$$cov(\mathcal{F}) = min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subset \mathcal{F} \wedge \bigcup \mathscr{A} = X\}$$

$$cov_h(\mathcal{F}) = min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subset \mathcal{F} \wedge (\exists B \in \mathcal{B}_+(I)) \bigcup \mathscr{A} = B\}$$

$$cof(I) = min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subseteq I \wedge (\forall A \in I)(\exists B \in \mathscr{B})\ A \subseteq B\}$$

$$Cof(I) = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subseteq \mathcal{B}_+(I) \wedge (\forall A \in \mathcal{B}_+(I))(\exists B \in \mathscr{B})(B \subseteq A)\}$$

$\mathscr{N}$ σ-ideał zbiorów miary zero na $\mathbb{R}$ (ewentualnie $[0, 1]$, 2^ω)
$\mathscr{M}$ σ-ideał zbiorów meager w X
$cov(\mathscr{M}) = cov_h(\mathscr{M})$, $cov(\mathscr{N}) = cov_h(\mathscr{N})$.

Twierdzenie (Cichoń-Kamburelis-Pawlikowski)

Jeżeli I jest c.c.c. σ-ideałem z bazą borelowską na X, to $cof(I) = Cof(I)$

J. Cichoń, A. Kamburelis, J. Pawlikowski, On dense subsets of the measure algebra, PAMS, Vol. 84, No 1, 1985, p. 142-146

Współczynniki kardynalne

Niech (X, I) - ideałowa przestrzeń polska, $\mathscr{F} \subset I$, wtedy

$$cov(\mathcal{F}) = min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subset \mathcal{F} \wedge \bigcup \mathscr{A} = X\}$$

$$cov_h(\mathcal{F}) = min\{|\mathscr{A}| : \mathscr{A} \subset \mathcal{F} \wedge (\exists B \in \mathcal{B}_+(I)) \bigcup \mathscr{A} = B\}$$

$$cof(I) = min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subseteq I \wedge (\forall A \in I)(\exists B \in \mathscr{B})\ A \subseteq B\}$$

$$Cof(I) = \min\{|\mathscr{B}| : \mathscr{B} \subseteq \mathcal{B}_+(I) \wedge (\forall A \in \mathcal{B}_+(I))(\exists B \in \mathscr{B})(B \subseteq A)\}$$

$\mathscr{N}$ σ-ideał zbiorów miary zero na $\mathbb{R}$ (ewentualnie $[0, 1]$, 2^ω)
$\mathscr{M}$ σ-ideał zbiorów meager w X
$cov(\mathscr{M}) = cov_h(\mathscr{M})$, $cov(\mathscr{N}) = cov_h(\mathscr{N})$.

Twierdzenie (Cichoń-Kamburelis-Pawlikowski)

Jeżeli I jest c.c.c. σ-ideałem z bazą borelowską na X, to $cof(I) = Cof(I)$

J. Cichoń, A. Kamburelis, J. Pawlikowski, On dense subsets of the measure algebra, PAMS, Vol. 84, No 1, 1985, p. 142-146

Całkowita I-niemierzalność

(X, I) - ideałowa przestrzeń polska. Zbiór $A \subseteq X$ jest całkowicie I-niemierzalny w X jeśli

$$(\forall B \in \mathcal{B}_+(I))\ A \cap B \neq \emptyset \wedge A^c \cap B \neq \emptyset.$$

- $A \subseteq X$ jest całkowicie $[X]^{\leqslant\omega}$-niemierzalny jeśli A jest zbiorem Bernsteina w X,
- $A \subseteq [0,1]$ jest całkowicie $\mathcal{N}$-niemierzalny jeśli $\lambda_*(A) = 0$ i $\lambda^*(B) = 1$,
- $A \subseteq X$ jest całkowicie $\mathcal{M}$-niemierzalny wtedy i tylko wtedy gdy jeśli $\emptyset \neq U \subseteq X$ wtedy $A \cap U$ nie ma własności Baire'a.

Całkowita I-niemierzalność

(X, I) - ideałowa przestrzeń polska. Zbiór $A \subseteq X$ jest całkowicie I-niemierzalny w X jeśli

$$(\forall B \in \mathcal{B}_+(I))\ A \cap B \neq \emptyset \wedge A^c \cap B \neq \emptyset.$$

- $A \subseteq X$ jest całkowicie $[X]^{\leqslant\omega}$-niemierzalny jeśli A jest zbiorem Bernsteina w X,
- $A \subseteq [0,1]$ jest całkowicie $\mathscr{N}$-niemierzalny jeśli $\lambda_*(A) = 0$ i $\lambda^*(B) = 1$,
- $A \subseteq X$ jest całkowicie $\mathscr{M}$-niemierzalny wtedy i tylko wtedy gdy jeśli $\emptyset \neq U \subseteq X$ wtedy $A \cap U$ nie ma własności Baire'a.

J. Cichoń, M. Morayne, RR, Cz. Ryll-Nardzewski, Sz. Żeberski

Twierdzenie (1)

Niech (X, I) będzie ideałową przestrzenią polską. Niech $\mathcal{A} \subseteq I$ będzie rodziną taką, że:

1. $X \setminus \bigcup \mathcal{A} \in I$,
2. $(\forall x \in X) \, (\bigcup \{A \in \mathcal{A} : \ x \in A\} \in I)$,
3. $cov_h(\{\bigcup \{A \in \mathcal{A} : \ x \in A\} : \ x \in X\}) \geqslant Cof(I)$.

To wtedy istnieje taka podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$, że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie I-niemierzalną w X.

J. Cichoń, M. Morayne, R. Ratowski, Cz. Ryll-Nardzewski, Sz. Żeberski, *On nonmeasurable unions*, Topology and its Applications, 154 (2007), pp.884-893,

Rodziny regularne

Twierdzenie (RR and Sz. Żeberski)

(X, I) ideałowa przestrzeń polska, Y przestrzeń polska, I jest c.c.c.. Niech $F \subseteq X \times Y$ analityczna relacja taka, że:

1. $X \setminus \{x \in X : (\exists y \in Y)\,((x, y) \in F)\} \in I$,
2. $(\forall y \in Y)\,(\{x \in X : (x, y) \in F\} \in I)$,
3. $(\forall x \in X)\,(|\{y \in Y : (x, y) \in F\}| < \aleph_0)$.

To istnieje $Z \subseteq Y$ taki, że

$$F^{-1}[Z] = \{x \in X : (\exists y \in Z) : (x, y) \in F\}$$

jest całkowicie I-niemierzalny w X.

Ralowski, R., Żeberski, Sz., *Complete nonmeasurability in regular families*. Houston Journal of Mathematics, Vol. 34 No. 3 (2008), 773–780.

Dowód

Rodzina $\mathcal{F} = \{F^y : \ y \in Y\}$ - jest punktowo skończona z (3).

Claim

$$(\forall B \in Bor(X) \setminus I) \ B \subseteq [\bigcup \mathcal{F}]_I \to |\{A \in \mathcal{F} : \ B \cap A \neq \emptyset\}| = \mathfrak{c}.$$

Dowód. $(B \times Y) \cap F \subseteq X \times Y$ *jest analityczny, stąd* $W = \pi_Y[(B \times Y) \cap F]$ *też. Więc* $|W| \in \{\aleph_0, \mathfrak{c}\}$. *Gdyby* $|W| = \aleph_0$, *to z (2) mamy* $\bigcup\{A \in \mathcal{F} : \ A \cap B \neq \emptyset\} \in I$, *co jest niemożliwe wobec (1).* ∎

Dowód cd.

Niech $D \subseteq X$, to $]D[_I$ jest maksymalny (mod I) zbiór borelowski zawarty w D. I jest $c.c.c.$, więc $]D[_I$ istnieje.
Utwórzmy $\{\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{F} : \xi < \gamma\}$ taki że:

- $|\mathcal{A}_\xi| < \mathfrak{c}$,
- $\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{F} \setminus \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{A}_\eta$,
- $]\bigcup \mathcal{A}_\xi[_I$ jest maksymalny w $\left\{]\bigcup \mathcal{A}[_I\colon\ \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \setminus (\bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{A}_\eta) \wedge |\mathcal{A}| < \mathfrak{c}\right\}$

Dowód cd.

Ponieważ $\{\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{F} : \xi < \gamma\}$ jest taka, że dla dowolnego $\xi < \gamma$

- $|\mathcal{A}_\xi| < \mathfrak{c}$,
- $\mathcal{A}_\xi \subseteq \mathcal{F} \setminus \bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{A}_\eta$,
- $]\bigcup \mathcal{A}_\xi[_I$ jest maksymalny element w $\left\{]\bigcup \mathcal{A}[_I \colon\ \mathcal{A} \subset \mathcal{F} \setminus (\bigcup_{\eta<\xi} \mathcal{A}_\eta) \wedge |\mathcal{A}| < \mathfrak{c}\right\}$

Wtedy

- jeśli $\eta < \xi$, to $]\bigcup \mathcal{A}_\xi[_I \subseteq]\bigcup \mathcal{A}_\eta[_I$,
- $\mathcal{F}$ jest punktowo skończona, to $]\mathcal{A}_\omega[_I = \emptyset$.

Dowód cd.

Niech $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} \setminus \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{A}_n$. Ponieważ na mocy Claimu mamy

$$(\forall B \in Bor(X) \setminus I)\ B \subseteq [\bigcup \mathcal{F}]_I \to |\{A \in \mathcal{F} :\ B \cap A \neq \emptyset\}| = \mathfrak{c},$$

to wtedy

- $[\bigcup \mathcal{F}_0]_I = [\bigcup \mathcal{F}]_I$ i
- $(\forall B \in Bor(X) \setminus I)(\forall \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}_0)\ B \subseteq \bigcup \mathcal{A} \to |\mathcal{A}| = \mathfrak{c}$

Dowód cd.

Ponumerujmy
$\{B^0_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} = \{B \in Bor(X) \setminus I : \; B \subseteq [\bigcup \mathcal{F}_0]_I \setminus]\bigcup \mathcal{F}_0[_I\}$ i
$\{B^1_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} = \{B \in Bor(X) \setminus I : \; B \subseteq]\bigcup \mathcal{F}_0[_I\}$.
Niech $\{(F^0_\xi, F^1_\xi, d_\xi) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} \times]\bigcup \mathcal{F}_0[_I : \xi < \mathfrak{c}\}$

- $F^0_\xi \cap B^0_\xi \neq \emptyset$,
- $F^1_\xi \cap B^1_\xi \neq \emptyset$,
- $d_\xi \in B^1_\xi$,
- $\{d_\eta : \eta < \xi\} \cap \bigcup_{\eta<\xi}(F^0_\eta \cup F^1_\eta) = \emptyset$.

Niech $\mathcal{F}' = \{F^0_\xi : \xi < \mathfrak{c}\} \cup \{F^1_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, to $\bigcup \mathcal{F}'$ jest całkowicie I-niemierzalny w $[\bigcup \mathcal{F}]_I$.

Rodziny regularne

Twierdzenie (RR and Sz. Żeberski)

Niech (X, I) ideałowa przestrzeń polska, ponadto I spełnia warunek:

$$(\forall B \in Bor(X) \setminus I)(\exists P \in Perf(X) \setminus I)(P \subseteq B).$$

Niech $\mathcal{A} \subseteq I$ będzie partycją X taką że

$$(\forall P \in Perf(X)) \left(\bigcup\{A \in \mathcal{A} : \ A \cap F \neq \emptyset\} \in Bor(X)\right).$$

To istnieje podrodzina $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ taka, że $\bigcup \mathcal{A}'$ jest całkowicie I-niemierzalnym podzbiorem X.

Rałowski, R., Żeberski, Sz., *Complete nonmeasurability in regular families*. Houston Journal of Mathematics, Vol. 34 No. 3 (2008), 773–780.

Przesunięcia małych zbiorów

Twierdzenie

Niech $P \subseteq \mathbb{R}$ *będzie zbiorem miary Lebesgue'a zero, takim że*

$$\{x \in \mathbb{R} : \bigcup\{t + P : x \in t + P\} \notin \mathcal{N}\} \in \mathcal{N}.$$

To istnieje $T \subseteq \mathbb{R}$ *taki że* $T + P$ *jest całkowicie* $\mathcal{N}$*-niemierzalny.*

Dowód

Dla $t \in \mathbb{R}$ niech $Z_t = \bigcup\{x + P : \; t \in x + P\}$. Oczywiście, z założenia $Z_t \in \mathscr{N}$. Niech

$$Z = \bigcup\{\{t\} \times Z_t : \; t \in \mathbb{R}\}.$$

Claim. Z jest miary zero na $\mathbb{R}^2$

Dowód.

Zauważmy, że dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ mamy

$$\begin{aligned} t + Z_0 =& t + \bigcup\{x + P :\ 0 \in x + P\} \\ =& \bigcup\{(t + x) + P :\ 0 \in x + P\} \\ =& \bigcup\{(t + x) + P :\ t \in (t + x) + P\} \\ =& \bigcup\{y + P :\ t \in y + P\} = Z_t. \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}^2 \ni (t, s) \mapsto \varphi(t, s) = (t, t + s) \in \mathbb{R}^2 \text{ jest homeomorfizmem}$$

Wlog $Z_0 \in \mathcal{N}$ jest zbiorem G_δ, wtedy $Z = \varphi[\mathbb{R} \times Z_0]$ jest G_δ na $\mathbb{R}^2$
Ponieważ Z jest G_δ i $Z_t \in \mathcal{N}$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$, to z twierdzenia Fubiniego Z jest miary zero w $\mathbb{R}^2$.

$\square$

Claim. $cov_h(\{P + t : \ t \in \mathbb{R}\}) = \mathfrak{c}$

Dowód.

Niech $B \in Bor(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{N}$, to $Z_B = B^2 \cap Z$ jest miary zero na $\mathbb{R}^2$. Z twierdzenia Mycielskiego, istnieje zbiór doskonały $Q \subseteq B$ taki, że

$$Q^2 \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} \subseteq B^2 \setminus Z.$$

Wtedy

$$(\forall s, s' \in Q)(s \neq s' \to (s, s') \notin Z \to s' \notin Z_s)$$

a stąd $cov_h(\{P + t : \ t \in \mathbb{R}\}) = \mathfrak{c}$

$\square$

Dowód cd.

Niech $Bor(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{N} = \{B_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$,
Zbudujmy ciąg pozaskończony $\{(t_\xi, d_\xi) : \ \xi < \mathfrak{c}\}$ taki że dla dowolnego $\xi < \mathfrak{c}$ mamy:

1. $(t_\xi + P) \cap B_\xi \neq \emptyset$,
2. $(t_\xi + P) \cap \{d_\eta : \eta < \xi\} = \emptyset$,
3. $d_\xi \in B_\xi \setminus \bigcup_{\eta \leqslant \xi}(t_\eta + P)$.

Załóżmy, że mamy już ciąg długości $\alpha < \mathfrak{c}$. Zauważmy że

$$\begin{aligned} T_\alpha =& \{t \in \mathbb{R} : \ (t + P) \cap B_\alpha \neq \emptyset\} \supset \{t \in \mathbb{R} : \ t + x_0 \in B_\alpha\} \\ =& - x_0 + B_\alpha \in Bor(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{N} \end{aligned}$$

dla pewnego ustalonego elementu $x_0 \in P$.

koniec dowodu

Z Claimu mamy

$$cov_h(\{t - P : t \in \mathbb{R}\}) = cov_h(\{t + P : t \in \mathbb{R}\}) = \mathfrak{c}.$$

Więc jest $t \in \mathbb{R}$ dla którego mamy

$$t \in T_\alpha \setminus \bigcup_{\xi<\alpha} (d_\xi - P).$$

Niech $t_\alpha = t$ i $d_\alpha \in B_\alpha \setminus \bigcup_{\xi\leqslant\alpha}(t_\xi + P)$. Kostrukcja w kroku $\alpha < \mathfrak{c}$ jest zakończona.
Biorąc $T = \{t_\xi : \xi < \mathfrak{c}\}$, mamy $T + P$ jest całkowicie $\mathscr{N}$-niemierzalny w $\mathbb{R}$. ∎

Dziękuję za uwagę