Konopnica, 20 maja 2017.

Kategoria Baire'a przestrzeni nietrywialnych ciągów zbieżnych

Michał Popławski

Instytut Matematyki, Politechnika Łódzka

Wprowadzenie

Rozważmy przestrzeń Hausdorffa X.

Definicja

Podzbiór domknięty i przeliczalny $S \subset X$ nazywamy nietrywialnym ciągiem zbieżnym w X, jeśli $S = \{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lim x_n\}$ dla pewnego różnowartościowego ciągu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zbieżnego do $\lim x_n \setminus \{x_m \colon m \in \mathbb{N}\}$. Zbiór takich ciągów oznaczamy $S_c(X)$.

Ponieważ ciągi nietrywialne są zwarte, to w $S_c(X)$ możemy wrowadzić topologię Vietorisa dziedziczoną z przestrzeni $K(X)$ wszystkich zbiorów zwartych. Zbiory postaci $< V_1, \dots, V_n >:=$

$$\left\{ S \in S_c(X) \colon S \subset \bigcup_{i=1}^{n} V_i \text{ oraz } S \cap V_i \neq \emptyset \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n \right\},$$

dla zbiorów $V_1, \dots, V_n$ otwartych w X, $n \in \mathbb{N}$, stanowią bazę przestrzeni $S_c(X)$.

Postawienie problemu

W pracy S. Garcia-Ferreira, Y.F. Ortiz-Castillo, *The hyperspace of convergent sequences*, Topology Appl. 196 (2015), 795–804., autorzy stawiają następujący problem.

Pytanie

Czy dla każdej przestrzeni metrycznej X w sobie gęstej, przestrzeń $S_c(X)$ jest pierwszej kategorii Baire'a (w sobie)?

Przestrzeń topologiczna X jest w sobie gęsta, gdy nie posiada punktów izolowanych.

Narzędzia

Niech $C_1, \dots, C_k$ będą niepustymi, domkniętymi, parami rozłącznymi podzbiorami przestrzeni Hausdorffa X oraz $k, m \in \mathbb{N}, 1 \leqslant i \leqslant m$. Oznaczmy $N_k^i(m, \{C_j : j \leqslant k\}) :=$

$$\left\{ S \in S_c(X) \colon S \subset \bigcup_{j=1}^{k} C_j \text{ oraz } 1 \leqslant |S \cap C_l| \leqslant m \text{ dla } l \leqslant k,\ \ l \neq i \right\}$$

oraz $N_k(m, \{C_j : j \leqslant k\}) := \bigcup_{i=1}^{k} N_k^i(m, \{C_j : j \leqslant k\})$. (Zatem jeśli $S \in N_k^i(m, \{C_j : j \leqslant k\})$, to $|S \cap C_i| = \omega$.)

Lemat 1 (Garcia-Ferreira, Ortiz-Castillo)

Niech X będzie Hausdorffa i w sobie gęsta. Wówczas zbiory $N_k(m, \{C_j : j \leqslant k\})$ są nigdziegęste.

Narzędzia

Lemat 2 (Garcia-Ferreira, Ortiz-Castillo)

Niech X będzie Hausdorffa i w sobie gęsta. Niech C_1, C_2 będą niepustymi, domkniętymi i rozłącznymi podzbiorami X. Wówczas zbiór $< \mathrm{Int}(C_1), \mathrm{Int}(C_2) >$ jest pierwszej kategorii w $S_c(X)$.

Twierdzenie (Banacha o kategorii)

Dowolna suma zbiorów otwartych pierwszej kategorii jest pierwszej kategorii.

Ku odpowiedzi

Lemat 3

Niech X będzie Hausdorffa oraz $S \in S_c(X)$. Istnieją takie otoczenie V_S punktu $\lim x_n$ oraz otoczenia V_n punktów x_n, $n \in \mathbb{N}$,że

$$V_1 \cap V_n = \emptyset \text{ dla n } \geqslant 2 \quad \text{ oraz } V_1 \cap V_S = \emptyset.$$

Dowód.

Z warunku Hausdorffa, istnieją otoczenia V_1', V_S punktów $x_1, \lim x_n$ spełniające $V_1' \cap V_S = \emptyset$. Zbiór $M := \{m \geqslant 2 \colon x_m \notin V_S\}$ jest skończony. Dla każdego $m \in M$ istnieją takie otoczenia $V_{1,m}$, V_m punktów x_1, x_m, że $V_{1,m} \cap V_m = \emptyset$. Przekrój skończony $V_1 := V_1' \cap \bigcap_{m \in M} V_{1,m}$ spełnia warunek: $V_1 \cap V_m = \emptyset$ dla $m \in M$. Wystarcza przyjąć $V_k = V_S$ dla $k \in M \cup \{1\}$. $\square$

Ku odpowiedzi

Lemat 4

Niech X będzie regularna oraz $S \in \mathcal{S}_c(X)$. Istnieją takie niepuste, rozłączne, domknięte zbiory $C_1, C_2 \subset X$, że $S \in < \mathrm{Int}(C_1), \mathrm{Int}(C_2) >$.

Dowód.

Niech $V_S, V_n, n \in \mathbb{N}$ będą jak w poprzednim lemacie. Ponieważ $V_1 \cap (V_S \cup \bigcup_{n \geqslant 2} V_n) = \emptyset$, więc $V_1 \cap \mathrm{cl}(V_S \cup \bigcup_{n \geqslant 2} V_n) = \emptyset$. Z warunku regularności, wybierzmy otoczenie W_1 punktu x_1 spełniające: $\mathrm{cl}(W_1) \subset V_1$. Przyjmijmy $C_1 := \mathrm{cl}(W_1)$, $C_2 = \mathrm{cl}(V_S \cup \bigcup_{n \geqslant 2} V_n)$. Oczywiście zbiory te są niepuste, rozłączne i domknięte. Ponadto, $x_1 \in W_1 \subset \mathrm{Int}(C_1)$ oraz $\{x_n \colon n \geqslant 2\} \cup \{\lim x_n\} \subset \bigcup_{n \geqslant 2} V_n \cup V_S \subset \mathrm{Int}(C_2)$. Zatem $S \in < \mathrm{Int}(C_1), \mathrm{Int}(C_2) >$. $\square$

Twierdzenie

Niech X będzie regularna oraz w sobie gęsta. Wówczas $S_c(X)$ jest pierwszej kategorii.

Dowód.

Niech $S \in S_c(X)$. Rozważmy otoczenie S w $S_c(X)$ jak w Lemacie 4. Z Lematu 2 otoczenie to jest pierwszej kategorii. Z twierdzenia Banacha o kategorii, $S_c(X)$ jest pierwszej kategorii. $\square$

Pytania

Garcia-Ferreira, Ortiz-Castillo stawiają również następujące problemy:

Problem

Czy $S_c(\omega_1)$ jest pierwszej kategorii?

Przestrzeń ω_1 posiada nieskończenie wiele punktów izolowanych.

Problem

Czy $S_c(\mathbb{Q})$ oraz $S_c(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ są homeomorficzne?

Obie przestrzenie są zerowymiarowe, Hausdorffa oraz w każdym otoczeniu każdego punktu jest $\mathfrak{c}$ wiele punktów.

Dziękuję za uwagę!