Topologie Hashimoto i homeomorfizmy

Konopnica 2017

Topologie Hashimoto

Załóżmy że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest T_1 i spełnia drugi aksjomat przeliczalności
oraz $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem zawierającym zbiory jednopunktowe i spełniającym warunek $\mathcal{I} \cap \mathcal{T} = \{\emptyset\}$.

Wówczas

- rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} := \{U \setminus P : U \in \mathcal{T}, P \in \mathcal{I}\}$ jest topologią,
- $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ jest spójna $\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ jest spójna.

Topologie Hashimoto

Załóżmy że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest T_1 i spełnia drugi aksjomat przeliczalności
oraz $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem zawierającym zbiory jednopunktowe i spełniającym warunek $\mathcal{I} \cap \mathcal{T} = \{\emptyset\}$.

Wówczas

- rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} := \{U \setminus P : U \in \mathcal{T}, P \in \mathcal{I}\}$ jest topologią,
- $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ jest spójna $\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ jest spójna.

Topologie Hashimoto

Załóżmy że przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ jest T_1 i spełnia drugi aksjomat przeliczalności
oraz $\mathcal{I}$ jest σ-ideałem zawierającym zbiory jednopunktowe i spełniającym warunek $\mathcal{I} \cap \mathcal{T} = \{\emptyset\}$.

Wówczas

- rodzina $\mathcal{T}_{\mathcal{I}} := \{U \setminus P : U \in \mathcal{T}, P \in \mathcal{I}\}$ jest topologią,
- $(X, \mathcal{T}_{\mathcal{I}})$ jest spójna $\Leftrightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ jest spójna.

Zbiory miary zero dla miar Hausdorffa

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę zero względem miary Hausdorffa rzędu α ($0 < \alpha \leqslant 1$) jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $\delta > 0$ istnieje ciąg przedziałów otwartych $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \;\; \wedge \;\; \forall_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) \leqslant \delta \;\; \wedge \;\; \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda(I_n))^{\alpha} < \varepsilon.$$

$\mathcal{N}_\alpha$ - σ-ideał zbiorów miary zero względem miary Hausdorffa rzędu α

Fakt 1. Jeśli $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, to istnieje zbiór $A \in \mathcal{N}_\alpha \setminus \mathcal{N}_\beta$.

Co więcej, istnieje taki zbiór $A \subset \mathbb{R}$, że dla dowolnego przedziału I

$$A \cap I \in \mathcal{N}_\alpha \setminus \mathcal{N}_\beta$$

Zbiory miary zero dla miar Hausdorffa

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę zero względem miary Hausdorffa rzędu α ($0 < \alpha \leqslant 1$) jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $\delta > 0$ istnieje ciąg przedziałów otwartych $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ taki, że

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \quad \wedge \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \lambda(I_n) \leqslant \delta \quad \wedge \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda(I_n))^\alpha < \varepsilon.$$

$\mathcal{N}_\alpha$ - σ-ideał zbiorów miary zero względem miary Hausdorffa rzędu α

Fakt 1. Jeśli $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, to istnieje zbiór $A \in \mathcal{N}_\alpha \setminus \mathcal{N}_\beta$.

Co więcej, istnieje taki zbiór $A \subset \mathbb{R}$, że dla dowolnego przedziału I

$$A \cap I \in \mathcal{N}_\alpha \setminus \mathcal{N}_\beta$$

Zbiory miary zero dla miar Hausdorffa

Zbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma miarę zero względem miary Hausdorffa rzędu α $(0 < \alpha \leqslant 1)$ jeśli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ i dowolnego $\delta > 0$ istnieje ciąg przedziałów otwartych $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ taki, że

$$A \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n \ \wedge \ \forall_{n \in \mathbb{N}} \lambda(I_n) \leqslant \delta \ \wedge \ \sum_{n \in \mathbb{N}} (\lambda(I_n))^\alpha < \varepsilon.$$

$\mathcal{N}_\alpha$ - σ-ideał zbiorów miary zero względem miary Hausdorffa rzędu α

Fakt 1. Jeśli $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$, to istnieje zbiór $A \in \mathcal{N}_\alpha \setminus \mathcal{N}_\beta$.

Co więcej, istnieje taki zbiór $A \subset \mathbb{R}$, że dla dowolnego przedziału I

$$A \cap I \in \mathcal{N}_\alpha \setminus \mathcal{N}_\beta$$

Topologie Hashimoto dla $\mathcal{N}_\alpha$

nat - topologia naturalna na prostej

$$nat_{\mathcal{N}_\alpha} := \{U \setminus N : U \in nat,\ N \in \mathcal{N}_\alpha\}.$$

Fakt 2. Jeśli $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ to

$$nat_{\mathcal{N}_\alpha} \setminus nat_{\mathcal{N}_\beta} \neq \varnothing.$$

Co więcej, topologie $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$ oraz $nat_{\mathcal{N}_\beta}$ nie są podobne.

Topologie Hashimoto dla $\mathcal{N}_\alpha$

nat - topologia naturalna na prostej

$$nat_{\mathcal{N}_\alpha} := \{U \setminus N : U \in nat,\ N \in \mathcal{N}_\alpha\}\,.$$

Fakt 2. Jeśli $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ to

$$nat_{\mathcal{N}_\alpha} \setminus nat_{\mathcal{N}_\beta} \neq \varnothing.$$

Co więcej, topologie $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$ oraz $nat_{\mathcal{N}_\beta}$ nie są podobne.

Topologie Hashimoto dla $\mathcal{N}_\alpha$

nat - topologia naturalna na prostej

$$nat_{\mathcal{N}_\alpha} := \{U \setminus N : U \in nat,\ N \in \mathcal{N}_\alpha\}.$$

Fakt 2. Jeśli $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ to

$$nat_{\mathcal{N}_\alpha} \setminus nat_{\mathcal{N}_\beta} \neq \varnothing.$$

Co więcej, topologie $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$ oraz $nat_{\mathcal{N}_\beta}$ nie są podobne.

Główne twierdzenie

Oznaczmy $\mathcal{N} := \mathcal{N}_1$

Twierdzenie

Dla dowolnego $\alpha \in (0,1)$ przestrzenie $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$ i $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ nie są homeomorficzne.

Lemat 1: Jeśli $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ oraz $h : \left([0,1], nat_{\mathcal{N}_\beta}\right) \to \left([0,1], nat_{\mathcal{N}_\alpha}\right)$ jest homeomorfizmem, to jest też homeomorfizmem przestrzeni $([0,1], nat) \to ([0,1], nat)$.

Lemat 2: Jeśli $h : ([0,1], nat) \to ([0,1], nat)$ jest rosnącym homeomorfizmem oraz istnieje skończona dodatnia pochodna funkcji h w jakimś punkcie $x_0 \in (0,1)$, to istnieje taki zbiór $B \in nat_{\mathcal{N}_\alpha}$ że $h(B) \notin nat_{\mathcal{N}_\beta}$.

Główne twierdzenie

Oznaczmy $\mathcal{N} := \mathcal{N}_1$

Twierdzenie

Dla dowolnego $\alpha \in (0,1)$ przestrzenie $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$ i $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ nie są homeomorficzne.

Lemat 1: Jeśli $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ oraz $h : \left([0,1], nat_{\mathcal{N}_\beta}\right) \to ([0,1], nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ jest homeomorfizmem, to jest też homeomorfizmem przestrzeni $([0,1], nat) \to ([0,1], nat)$.

Lemat 2: Jeśli $h : ([0,1], nat) \to ([0,1], nat)$ jest rosnącym homeomorfizmem oraz istnieje skończona dodatnia pochodna funkcji h w jakimś punkcie $x_0 \in (0,1)$, to istnieje taki zbiór $B \in nat_{\mathcal{N}_\alpha}$ że $h(B) \notin nat_{\mathcal{N}_\beta}$.

Główne twierdzenie

Oznaczmy $\mathcal{N} := \mathcal{N}_1$

Twierdzenie

Dla dowolnego $\alpha \in (0,1)$ przestrzenie $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$ i $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ nie są homeomorficzne.

Lemat 1: Jeśli $0 < \beta < \alpha \leqslant 1$ oraz $h : \left([0,1], nat_{\mathcal{N}_\beta}\right) \to \left([0,1], nat_{\mathcal{N}_\alpha}\right)$ jest homeomorfizmem, to jest też homeomorfizmem przestrzeni $([0,1], nat) \to ([0,1], nat)$.

Lemat 2: Jeśli $h : ([0,1], nat) \to ([0,1], nat)$ jest rosnącym homeomorfizmem oraz istnieje skończona dodatnia pochodna funkcji h w jakimś punkcie $x_0 \in (0,1)$, to istnieje taki zbiór $B \in nat_{\mathcal{N}_\alpha}$ że $h(B) \notin nat_{\mathcal{N}_\beta}$.

$(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$ i $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ nie są homeomorficzne.

Lemat 3. (Natanson) Jeśli f jest ściśle rosnącą funkcją określoną na przedziale $[a, b]$ oraz w każdym punkcie zbioru $E \subset [a, b]$ przynajmniej jedna liczba pochodna funkcji f jest $\leqslant p$, to

$$\lambda^*(f(E)) \leqslant p \cdot \lambda^*(E).$$

Wniosek: Jeśli $f : [0, 1] \to [0, 1]$ jest funkcją ściśle rosnącą, to zbiór $f(\{x \in [0, 1] : f'(x) = 0\})$ ma miarę zero.

$(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$ i $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ nie są homeomorficzne.

Lemat 3. (Natanson) Jeśli f jest ściśle rosnącą funkcją określoną na przedziale $[a, b]$ oraz w każdym punkcie zbioru $E \subset [a, b]$ przynajmniej jedna liczba pochodna funkcji f jest $\leqslant p$, to

$$\lambda^*(f(E)) \leqslant p \cdot \lambda^*(E).$$

Wniosek: Jeśli $f : [0, 1] \to [0, 1]$ jest funkcją ściśle rosnącą, to zbiór $f\left(\{x \in [0, 1] : f'(x) = 0\}\right)$ ma miarę zero.

$(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$ i $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ nie są homeomorficzne.

Dowód Twierdzenia

Przypuśćmy wbrew tezie, że istnieje homeomorfizm $h : (\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}}) \to (\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$.

Ponieważ σ ideały $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}_\alpha$ są niezmiennicze ze względu na przesunięcia i mnożenie przez stałe dodatnie możemy założyć, że h jest homeomorfizmem z $([0,1], nat_{\mathcal{N}})$ na $([0,1], nat_{\mathcal{N}_\alpha})$.

Wobec Lematu 1
h jest także homeomorfizmem $([0,1], nat) \to ([0,1], nat)$. Zatem h jest odwracalna oraz h i h^{-1} są ciągłe. Stad h jest ściśle monotoniczna (dla ustalenia uwagi - przyjmujemy, że jest rosnąca), ma więc prawie wszędzie skończoną pochodną.

$(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$ i $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ nie są homeomorficzne.

Dowód Twierdzenia

Przypuśćmy wbrew tezie, że istnieje homeomorfizm
$h : (\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}}) \to (\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$.

Ponieważ σ ideały $\mathcal{N}$ i $\mathcal{N}_\alpha$ są niezmiennicze ze względu na przesunięcia i mnożenie przez stałe dodatnie możemy założyć, że h jest homeomorfizmem z $([0,1], nat_{\mathcal{N}})$ na $([0,1], nat_{\mathcal{N}_\alpha})$.

Wobec Lematu 1
h jest także homeomorfizmem $([0,1], nat) \to ([0,1], nat)$. Zatem h jest odwracalna oraz h i h^{-1} są ciągłe. Stad h jest ściśle monotoniczna (dla ustalenia uwagi - przyjmujemy, że jest rosnąca), ma więc prawie wszędzie skończoną pochodną.

$(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$ i $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ nie są homeomorficzne.

c.d. dowodu Twierdzenia

Z Lematu 2 wynika, że w żadnym punkcie pochodna h' nie może być dodatnia. Zatem zbiór

$$E := \{x \in [0,1] : h'(x) = 0\}$$

ma miarę 1.

Wobec Lematu 3: $\lambda(h(E)) = 0$.
Zbiór $A := [0,1] \setminus E$ jest domknięty w $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$. Co więcej, każdy podzbiór zbioru A jest $nat_{\mathcal{N}}$-domknięty. Zbiór $h(A)$ ma miarę 1, istnieje więc niemierzalny podzbiór C zbioru $h(A)$. Zbiory $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-otwarte i zbiory $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-domknięte są zbiorami mierzalnymi, więc C nie jest $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-domknięty. Ale $h^{-1}(C) \subset A$, więc C powinien być $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-domknięty - sprzeczność.

$(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$ i $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ nie są homeomorficzne.

c.d. dowodu Twierdzenia

Z Lematu 2 wynika, że w żadnym punkcie pochodna h' nie może być dodatnia. Zatem zbiór

$$E := \{x \in [0,1] : h'(x) = 0\}$$

ma miarę 1.

Wobec Lematu 3: $\lambda(h(E)) = 0$.
Zbiór $A := [0,1] \setminus E$ jest domknięty w $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$. Co więcej, każdy podzbiór zbioru A jest $nat_{\mathcal{N}}$-domknięty. Zbiór $h(A)$ ma miarę 1, istnieje więc niemierzalny podzbiór C zbioru $h(A)$. Zbiory $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-otwarte i zbiory $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-domknięte są zbiorami mierzalnymi, więc C nie jest $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-domknięty. Ale $h^{-1}(C) \subset A$, więc C powinien być $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-domknięty - sprzeczność.

$(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$ i $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}_\alpha})$ nie są homeomorficzne.

c.d. dowodu Twierdzenia

Z Lematu 2 wynika, że w żadnym punkcie pochodna h' nie może być dodatnia. Zatem zbiór

$$E := \{x \in [0,1] : h'(x) = 0\}$$

ma miarę 1.

Wobec Lematu 3: $\lambda(h(E)) = 0$.
Zbiór $A := [0,1] \setminus E$ jest domknięty w $(\mathbb{R}, nat_{\mathcal{N}})$. Co więcej, każdy podzbiór zbioru A jest $nat_{\mathcal{N}}$-domknięty. Zbiór $h(A)$ ma miarę 1, istnieje więc niemierzalny podzbiór C zbioru $h(A)$. Zbiory $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-otwarte i zbiory $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-domknięte są zbiorami mierzalnymi, więc C nie jest $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-domknięty. Ale $h^{-1}(C) \subset A$, więc C powinien być $nat_{\mathcal{N}_\alpha}$-domknięty - sprzeczność.

Miary generowane przez rzuty niesymetryczną monetą

Ustalmy liczbę $p \in (0,1)$ i rozważmy na przedziale $[0,1]$ miarę probabilistyczną μ_p generowaną przez rzut monetą, dla której prawdopodobieństwo "wypadnięcia" orła wynosi p.

Innymi słowy:
Niech X_1, X_2, ... będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $P\{X_n = 0\} = p$ oraz $P\{X_n = 1\} = 1 - p$.

Rozważmy $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n/2^n$ oraz dystrybuantę $F(x) = P\{X \leqslant x\}$ zmiennej losowej X.

Funkcja F jest ciągła w każdym punkcie, ściśle rosnąca na $[0,1]$ oraz osobliwa. (Billingsley)

Miary generowane przez rzuty niesymetryczną monetą

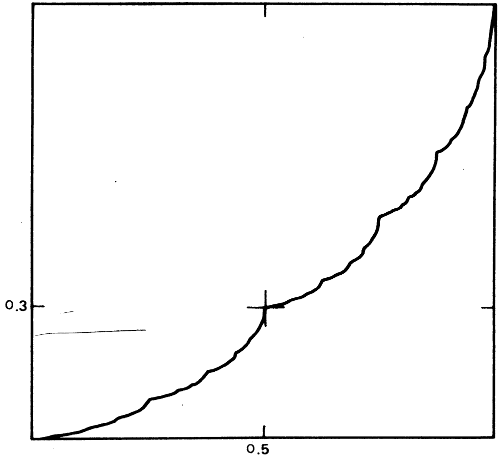
Ustalmy liczbę $p \in (0,1)$ i rozważmy na przedziale $[0,1]$ miarę probabilistyczną μ_p generowaną przez rzut monetą, dla której prawdopodobieństwo "wypadnięcia" orła wynosi p.

Innymi słowy:
Niech X_1, X_2, ... będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie takim, że $P\{X_n = 0\} = p$ oraz $P\{X_n = 1\} = 1 - p$.

Rozważmy $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n/2^n$ oraz dystrybuantę $F(x) = P\{X \leqslant x\}$ zmiennej losowej X.

Funkcja F jest ciągła w każdym punkcie, ściśle rosnąca na $[0,1]$ oraz osobliwa. (Billingsley)

Miary generowane przez rzuty niesymetryczną monetą



Wykres funkcji $F(x)$ dla $p_0 = 0{,}3$, $p_1 = 0{,}7$. Zgodnie ze wzorem rekurencyjnym (31.17) część wykresu na przedziale [0, 0,5] oraz część wykresu na przedziale [0,5, 1] są, jeśli nie brać pod uwagę zmian w skali, identyczne z całym wykresem. Dlatego też każdy odcinek krzywej zawiera zmniejszone według skali kopie całości, wynikająca stąd duża nieregularność funkcji jest niezbyt dobrze widoczna, gdyż mamy do czynienia z dokładnością nie większą niż grubość narysowanej linii.

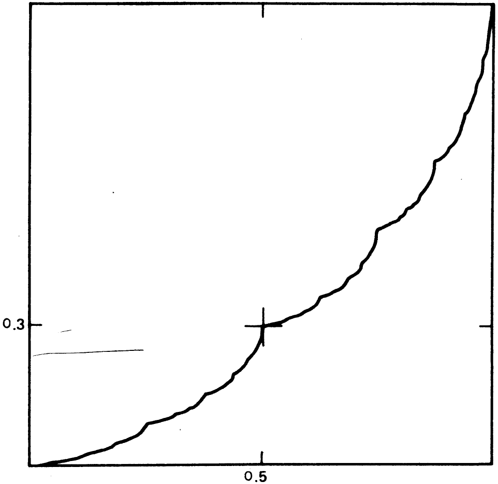
Topologie Hashimoto nat_p

Oznaczmy

$$nat_p := \{U \setminus P : U \in nat,\ \mu_p(P) = 0\}.$$

Twierdzenie

Dla dowolnego $p \in (0,1)$ przestrzenie $([0,1], nat_{\mathcal{N}})$ i $([0,1], nat_p)$ są homeomorficzne.



Wykres funkcji $F(x)$ dla $p_0 = 0{,}3$, $p_1 = 0{,}7$. Zgodnie ze wzorem rekurencyjnym (31.17) część wykresu na przedziale [0, 0,5] oraz część wykresu na przedziale [0,5, 1] są, jeśli nie brać pod uwagę zmian w skali, identyczne z całym wykresem. Dlatego też każdy odcinek krzywej zawiera zmniejszone według skali kopie całości, wynikająca stąd duża nieregularność funkcji jest niezbyt dobrze widoczna, gdyż mamy do czynienia z dokładnością nie większą niż grubość narysowanej linii.

Bibliografia

- P. Billingsley, *Prawdopodobieństwo i miara,* PWN 1987.
- H. Hashimoto, *On the *-topology and its applications*, Fund. Math. 91,1976, 5-10.
- N. F. G. Martin, *Generalized condensation points*, Duke Math. Journal, 28(4),1961, 507-514.
- I. P. Natanson, *Teoria funkcji zmiennej rzeczywistej*, Moskwa 1950.