Proste ideały gęstościowe

Jacek Tryba

Konopnica, Maj 2017

Wyniki uzyskane wspólnie z Adamem Kwelą, Michałem Popławskim i Jarosławem Swaczyną.

Definicja

Rozważmy klasę funkcji

$$G := \{g\colon \omega \to (0,\infty)\colon g(n) \to \infty \wedge \frac{n}{g(n)} \not\to 0\}.$$

Rozważmy klasę funkcji

$$G := \{g\colon \omega \to (0,\infty)\colon g(n) \to \infty \wedge \frac{n}{g(n)} \nrightarrow 0\}.$$

Definicja (Balcerzak, Das, Filipczak, Swaczyna)

Dla $g \in G$, *prostym ideałem gęstościowym* nazywamy rodzinę

$$\mathcal{Z}_g := \{A \subseteq \omega\colon \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{g(n)} = 0\}.$$

Przykłady

Definicja (Balcerzak, Das, Filipczak, Swaczyna)

Dla $g \in G$, *prostym ideałem gęstościowym* nazywamy rodzinę

$$\mathcal{Z}_g := \{A \subseteq \omega \colon \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{g(n)} = 0\}.$$

Przykładem takiego ideału jest klasyczny ideał gęstości asymptotycznej zero

$$\mathcal{Z} = \{A \subseteq \omega \colon \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0\}.$$

Przykłady

Definicja (Balcerzak, Das, Filipczak, Swaczyna)

Dla $g \in G$, *prostym ideałem gęstościowym* nazywamy rodzinę

$$\mathcal{Z}_g := \{A \subseteq \omega\colon \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{g(n)} = 0\}.$$

Przykładem takiego ideału jest klasyczny ideał gęstości asymptotycznej zero

$$\mathcal{Z} = \{A \subseteq \omega\colon \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0\}.$$

Innym przykładem jest ideał

$$\{A \subseteq \omega : \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap I_n|}{n!} = 0\},$$

gdzie I_n są kolejnymi przedziałami długości $n!$.

Podstawowe własności

- Proste ideały gęstościowe są ideałami gęstościowymi w sensie Faraha.

Podstawowe własności

- Proste ideały gęstościowe są ideałami gęstościowymi w sensie Faraha.
- Jeśli $g \leqslant^* h$ to $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{Z}_h$.

Podstawowe własności

- Proste ideały gęstościowe są ideałami gęstościowymi w sensie Faraha.
- Jeśli $g \leqslant^* h$ to $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{Z}_h$.
- Każdy ideał $\mathcal{Z}_g$ jest gęsty, to znaczy dla każdego nieskończonego $A \subseteq \omega$ istnieje taki nieskończony $B \subseteq A$, że $B \in \mathcal{Z}_g$.

Podstawowe własności

- Proste ideały gęstościowe są ideałami gęstościowymi w sensie Faraha.
- Jeśli $g \leqslant^* h$ to $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{Z}_h$.
- Każdy ideał $\mathcal{Z}_g$ jest gęsty, to znaczy dla każdego nieskończonego $A \subseteq \omega$ istnieje taki nieskończony $B \subseteq A$, że $B \in \mathcal{Z}_g$.
- Każdy prosty ideał gęstościowy jest przesuwalny, czyli dla każdego $A \in \mathcal{Z}_g$ mamy $A + 1 \in \mathcal{Z}_g$.

Podstawowe własności

- Proste ideały gęstościowe są ideałami gęstościowymi w sensie Faraha.
- Jeśli $g \leqslant^* h$ to $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{Z}_h$.
- Każdy ideał $\mathcal{Z}_g$ jest gęsty, to znaczy dla każdego nieskończonego $A \subseteq \omega$ istnieje taki nieskończony $B \subseteq A$, że $B \in \mathcal{Z}_g$.
- Każdy prosty ideał gęstościowy jest przesuwalny, czyli dla każdego $A \in \mathcal{Z}_g$ mamy $A + 1 \in \mathcal{Z}_g$.
- $\bigcap_{g \in G} \mathcal{Z}_g = \mathrm{Fin}$.

Podstawowe własności

- Proste ideały gęstościowe są ideałami gęstościowymi w sensie Faraha.
- Jeśli $g \leqslant^* h$ to $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{Z}_h$.
- Każdy ideał $\mathcal{Z}_g$ jest gęsty, to znaczy dla każdego nieskończonego $A \subseteq \omega$ istnieje taki nieskończony $B \subseteq A$, że $B \in \mathcal{Z}_g$.
- Każdy prosty ideał gęstościowy jest przesuwalny, czyli dla każdego $A \in \mathcal{Z}_g$ mamy $A + 1 \in \mathcal{Z}_g$.
- $\bigcap_{g \in G} \mathcal{Z}_g = \mathrm{Fin}$.
- $\bigcup_{g \in G} \mathcal{Z}_g = \{A \subseteq \omega : \liminf_{n \to \infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0\}$.

Podstawowe własności

- Proste ideały gęstościowe są ideałami gęstościowymi w sensie Faraha.
- Jeśli $g \leqslant^* h$ to $\mathcal{Z}_g \subseteq \mathcal{Z}_h$.
- Każdy ideał $\mathcal{Z}_g$ jest gęsty, to znaczy dla każdego nieskończonego $A \subseteq \omega$ istnieje taki nieskończony $B \subseteq A$, że $B \in \mathcal{Z}_g$.
- Każdy prosty ideał gęstościowy jest przesuwalny, czyli dla każdego $A \in \mathcal{Z}_g$ mamy $A + 1 \in \mathcal{Z}_g$.
- $\bigcap_{g \in G} \mathcal{Z}_g = \mathrm{Fin}$.
- $\bigcup_{g \in G} \mathcal{Z}_g = \{A \subseteq \omega : \liminf_{n \to \infty} \frac{|A \cap n|}{n} = 0\}$.
- Dla każdej funkcji $g \in G$ istnieje funkcja $h \in H = G \cap \omega^\omega \uparrow$ taka że $\mathcal{Z}_h = \mathcal{Z}_g$.

Liczba ideałów

Twierdzenie (BDFS)

Istnieje $\mathfrak{c}$ *wiele prostych ideałów gęstościowych nieporównywalnych względem zawierania.*

Liczba ideałów

Twierdzenie (BDFS)

Istnieje $\mathfrak{c}$ wiele prostych ideałów gęstościowych nieporównywalnych względem zawierania.

Definicja

Mówimy, że ideały $\mathcal{I}$ oraz $\mathcal{J}$ są *izomorficzne*, gdy istnieje bijekcja $\phi : \omega \to \omega$ taka, że dla każdego $A \subseteq \omega$ mamy $A \in \mathcal{I} \iff \phi^{-1}[A] \in \mathcal{J}$.

Twierdzenie

Istnieje $\mathfrak{c}$ wiele prostych ideałów gęstościowych parami nieizomorficznych.

Ile funkcji ma ten sam ideał?

Pytanie

Niech $h \in H$. Jaka jest moc zbioru $\{g \in H : \mathcal{Z}_h = \mathcal{Z}_g\}$?

Ile funkcji ma ten sam ideał?

Pytanie

Niech $h \in H$. Jaka jest moc zbioru $\{g \in H : \mathcal{Z}_h = \mathcal{Z}_g\}$?

Odpowiedź: $\mathfrak{c}$. Powyższy zbiór zawiera funkcje postaci $g(n) = \lfloor \alpha h(n) \rfloor$ dla dowolnej $\alpha > 0$.

Ile funkcji ma ten sam ideał?

Pytanie

Niech $h \in H$. Jaka jest moc zbioru $Z_h = \{g \in H : \mathcal{Z}_h = \mathcal{Z}_g\}/R$, gdy R jest relacją równoważnośći daną przez

$$gRh \iff \limsup_{n\to\infty} g(n)/h(n) < \infty \ \wedge \ \limsup_{n\to\infty} h(n)/g(n) < \infty?$$

Ile funkcji ma ten sam ideał?

Pytanie

Niech $h \in H$. Jaka jest moc zbioru $Z_h = \{g \in H : \mathcal{Z}_h = \mathcal{Z}_g\}/R$, gdy R jest relacją równoważnośći daną przez

$$gRh \iff \limsup_{n\to\infty} g(n)/h(n) < \infty \ \wedge \ \limsup_{n\to\infty} h(n)/g(n) < \infty?$$

Twierdzenie

$|Z_h| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $M > 0, \varepsilon > 0$ takie że dla prawie wszystkich $n \in \omega$ mamy

$$\frac{h(n + \lfloor \varepsilon h(n) \rfloor)}{h(n)} \leqslant M.$$

Ile funkcji ma ten sam ideał?

Pytanie

Niech $h \in H$. Jaka jest moc zbioru $Z_h = \{g \in H : \mathcal{Z}_h = \mathcal{Z}_g\}/R$, gdy R jest relacją równoważnośći daną przez

$$gRh \iff \limsup_{n\to\infty} g(n)/h(n) < \infty \ \wedge \ \limsup_{n\to\infty} h(n)/g(n) < \infty?$$

Twierdzenie

$|Z_h| = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją $M > 0, \varepsilon > 0$ takie że dla prawie wszystkich $n \in \omega$ mamy

$$\frac{h(n + \lfloor \varepsilon h(n) \rfloor)}{h(n)} \leqslant M.$$

Twierdzenie

Jeśli $|Z_h| > 1$ to $|Z_h| = \mathfrak{c}$.

Definicja

Niech $f\colon \mathbb{N} \to [0,\infty)$ będzie taką funkcją, że $\sum_{n\in\mathbb{N}} f(n) = \infty$, $\lim_{n\to\infty} f(n)/\sum_{i\leqslant n} f(i) = 0$. Wówczas rodzina tych $A \subseteq \mathbb{N}$, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i\in A, i<n} f(i)}{\sum_{i<n} f(i)} = 0$$

tworzy ideał Erdősa-Ulama $\mathcal{EU}_f$.

Ideały Erdősa-Ulama są ideałami gęstościowymi w sensie Faraha.

Proste gęstościowe vs EU

Theorem

Niech $\mathcal{Z}_h$ będzie prostym ideałem gęstościowym. Wówczas następujące warunki są równoważne.

1. *$\mathcal{Z}_h$ jest ideałem Erdősa-Ulama,*
2. *ciąg $(n/h(n))$ jest ograniczony,*
3. $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}_h$,
4. $\forall_{M>0}\ \exists_{L>0}\ \forall^{\infty}_{n\in\omega}\ \frac{h(n+\lfloor Lh(n)\rfloor)}{h(n)} > M.$

Proste gęstościowe vs EU

Theorem

Niech $\mathcal{Z}_h$ będzie prostym ideałem gęstościowym. Wówczas następujące warunki są równoważne.

1. *$\mathcal{Z}_h$ jest ideałem Erdősa-Ulama,*
2. *ciąg $(n/h(n))$ jest ograniczony,*
3. $\mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Z}_h$,
4. $\forall_{M>0}\ \exists_{L>0}\ \forall^{\infty}_{n\in\omega}\ \frac{h(n+\lfloor Lh(n)\rfloor)}{h(n)} > M.$

Istnieje także charakteryzacja kiedy ideały Erdősa-Ulama są prostymi ideałami gęstościowymi.