Twierdzenie Levy-Steiniza i zbiory osiągalne szeregów warunkowo zbieżnych

Jacek Marchwicki
(praca wspólna z Szymonem Głąbem)

21.05.2017 Konopnica

Wprowadzenie

Wprowadzenie

Zbiór osiągalny

$$A(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$$

Wprowadzenie

Zbiór osiągalny

$A(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$

Sum range

$SR(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_\infty\}$

Wprowadzenie

Zbiór osiągalny

$A(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$

Sum range

$SR(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_\infty\}$

Związek pomiędzy sum range, a zbiorem osiągalnym

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie szeregiem warunkowo zbieżnym w przestrzeni Banacha X. Wówczas $SR(x_n) \subset \overline{A(x_n)}$.

Wprowadzenie

Zbiór osiągalny

$A(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\}$

Sum range

$SR(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_\infty\}$

Związek pomiędzy sum range, a zbiorem osiągalnym

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie szeregiem warunkowo zbieżnym w przestrzeni Banacha X. Wówczas $SR(x_n) \subset \overline{A(x_n)}$.

Lemat

$SR(x_n) = \mathbb{R}^2$ wtedy i tylko wtedy gdy $\overline{A(x_n)} = \mathbb{R}^2$.

Ale to już było...

Ale to już było...

Czym może być zbiór osiągalny ?

Dla szeregów warunkowo zbieżnych na płaszczyźnie zbiór osiągalny może być między innymi:

Ale to już było...

Czym może być zbiór osiągalny ?

Dla szeregów warunkowo zbieżnych na płaszczyźnie zbiór osiągalny może być między innymi:

- wykresem funkcji;

Ale to już było...

Czym może być zbiór osiągalny ?

Dla szeregów warunkowo zbieżnych na płaszczyźnie zbiór osiągalny może być między innymi:

- wykresem funkcji;
- zbiorem, który nie jest ani typu F_σ ani G_δ;

Ale to już było...

Czym może być zbiór osiągalny ?

Dla szeregów warunkowo zbieżnych na płaszczyźnie zbiór osiągalny może być między innymi:

- wykresem funkcji;
- zbiorem, który nie jest ani typu F_σ ani G_δ;
- zbiorem gęstym o pustym wnętrzu;

Ale to już było...

Czym może być zbiór osiągalny ?

Dla szeregów warunkowo zbieżnych na płaszczyźnie zbiór osiągalny może być między innymi:

- wykresem funkcji;
- zbiorem, który nie jest ani typu F_σ ani G_δ;
- zbiorem gęstym o pustym wnętrzu;
- zbiorem otwartym nie będącym płaszczyzną;

Wektory Leviego

Wektory Leviego

Definicja

Powiemy, że $u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = 1$jest wektorem Leviego dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy, że $\sum_{v_n \in S_\varepsilon(u)} \|v_n\| = \infty$, gdzie $S_\varepsilon(u) = \{v : \langle u, v\rangle \geq (1-\varepsilon)\|u\|\|v\|\}$.

Wektory Leviego

Definicja

Powiemy, że $u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = 1$jest wektorem Leviego dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy, że $\sum_{v_n \in S_\varepsilon(u)} \|v_n\| = \infty$, gdzie $S_\varepsilon(u) = \{v : \langle u, v\rangle \geq (1-\varepsilon)\|u\|\|v\|\}$.

Fakt 1

Szereg bezwzględnie zbieżny nie posiada wektorów Leviego.

Wektory Leviego

Definicja

Powiemy, że $u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = 1$jest wektorem Leviego dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy, że $\sum_{v_n \in S_\varepsilon(u)} \|v_n\| = \infty$, gdzie $S_\varepsilon(u) = \{v : \langle u, v\rangle \geq (1-\varepsilon)\|u\|\|v\|\}$.

Fakt 1

Szereg bezwzględnie zbieżny nie posiada wektorów Leviego.

Fakt 2

Szereg warunkowo zbieżny posiada wektor Leviego na każdej domkniętej półsferze jednostkowej.

Wektory Leviego

Definicja

Powiemy, że $u \in \mathbb{R}^2$, $\|u\| = 1$jest wektorem Leviego dla szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ mamy, że $\sum_{v_n \in S_\varepsilon(u)} \|v_n\| = \infty$, gdzie $S_\varepsilon(u) = \{v : \langle u, v\rangle \geq (1-\varepsilon)\|u\|\|v\|\}$.

Fakt 1

Szereg bezwzględnie zbieżny nie posiada wektorów Leviego.

Fakt 2

Szereg warunkowo zbieżny posiada wektor Leviego na każdej domkniętej półsferze jednostkowej.

Wniosek

Szereg warunkowo zbieżny posiada przynajmniej dwa wektory Leviego, przy czym jeżeli posiada dokładnie dwa to są one wzajemnie przeciwne.

Przykłady

Przykłady

Jednowymiarowe sum-range i dwa wektory Leviego

- Dla szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^n}{n}, 0)$; $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{n})$ mamy odpowiednio $\mathbb{L}(x_n) = \{(1,0), (-1,0)\}$ oraz $\mathbb{L}(x_n) = \{(1,1), (-1,-1)\}$. Warto zauważyć, że $SR(x_n) = span(\mathbb{L}(x_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Przykłady

Jednowymiarowe sum-range i dwa wektory Leviego

- Dla szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n}, 0)$; $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{n})$ mamy odpowiednio $\mathbb{L}(x_n) = \{(1,0),(-1,0)\}$ oraz $\mathbb{L}(x_n) = \{(1,1),(-1,-1)\}$. Warto zauważyć, że $SR(x_n) = span(\mathbb{L}(x_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Dwuwymiarowe sum-range i dwa wektory Leviego

- Dla $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ mamy $\mathbb{L}(x_n) = \{(0,1),(0,-1)\}$

Przykłady

Jednowymiarowe sum-range i dwa wektory Leviego

- Dla szeregów $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^n}{n}, 0)$; $\sum_{n=1}^{\infty} y_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{n})$ mamy odpowiednio $\mathbb{L}(x_n) = \{(1,0), (-1,0)\}$ oraz $\mathbb{L}(x_n) = \{(1,1), (-1,-1)\}$. Warto zauważyć, że $SR(x_n) = span(\mathbb{L}(x_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Dwuwymiarowe sum-range i dwa wektory Leviego

- Dla $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$ mamy $\mathbb{L}(x_n) = \{(0,1), (0,-1)\}$

Mnóstwo wektorów Leviego

- Niech $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$ będzie takie, że $z^n \neq 1$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ jest warunkowo zbieżny oraz $\mathbb{L}(z_n) = S(0,1)$.

Przykłady

Przykłady

Trzy wektory Leviego

- Niech $x_{3n-2} = (-\frac{1}{3n-2}, -\frac{1}{3n-2})$, $x_{3n-1} = (\frac{1}{3n-1}, 0)$, $x_{3n} = (0, \frac{1}{3n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\mathbb{L}(x_n) = \{(-1,-1),(1,0),(0,1)\}$.

Przykłady

Trzy wektory Leviego

- Niech $x_{3n-2} = (-\frac{1}{3n-2}, -\frac{1}{3n-2})$, $x_{3n-1} = (\frac{1}{3n-1}, 0)$, $x_{3n} = (0, \frac{1}{3n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\mathbb{L}(x_n) = \{(-1,-1),(1,0),(0,1)\}$.
- Niech $x_{3n-2} = (-\frac{1}{3n-2}, -\frac{1}{\sqrt{3n-2}})$, $x_{3n-1} = (\frac{1}{3n-1}, 0)$, $x_{3n} = (0, \frac{1}{\sqrt{3n}})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\mathbb{L}(x_n) = \{(0,-1),(1,0),(0,1)\}$. W szczególności $\mathbb{L}(x_n) \cap \{(x,y) : x < 0\} = \emptyset$.

Cztery wektory Leviego

Przykłady

Trzy wektory Leviego

- Niech $x_{3n-2} = (-\frac{1}{3n-2}, -\frac{1}{3n-2})$, $x_{3n-1} = (\frac{1}{3n-1}, 0)$, $x_{3n} = (0, \frac{1}{3n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\mathbb{L}(x_n) = \{(-1,-1),(1,0),(0,1)\}$.
- Niech $x_{3n-2} = (-\frac{1}{3n-2}, -\frac{1}{\sqrt{3n-2}})$, $x_{3n-1} = (\frac{1}{3n-1}, 0)$, $x_{3n} = (0, \frac{1}{\sqrt{3n}})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\mathbb{L}(x_n) = \{(0,-1),(1,0),(0,1)\}$. W szczególności $\mathbb{L}(x_n) \cap \{(x,y) : x < 0\} = \emptyset$.

Cztery wektory Leviego

- $x_{2n-1} = (0, \frac{(-1)^n}{n})$, $x_{2n} = (\frac{(-1)^n}{n}, 0)$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $\mathbb{L}(x_n) = \{(0,-1),(-1,0),(0,1),(1,0)\}$.

Przynajmniej trzy wektory Leviego

Przynajmniej trzy wektory Leviego

Lemat

Załóżmy, że szereg warunkowo zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ posiada dwa liniowo niezależne wektory Leviego u, v. Wtedy $span^{+}(u, v) \subset \mathbb{A}_{abs}(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|x_n\| < \infty\}$.

Przynajmniej trzy wektory Leviego

Lemat

Załóżmy, że szereg warunkowo zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ posiada dwa liniowo niezależne wektory Leviego u, v. Wtedy $span^{+}(u, v) \subset \mathbb{A}_{abs}(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|x_n\| < \infty\}$.

Twierdzenie

Załóżmy, że szereg warunkowo zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ posiada wektor Leviego na każdej otwartej półsferze jednostkowej. Wówczas $\mathbb{A}_{abs}(x_n) = \mathbb{R}^2$.

Przynajmniej trzy wektory Leviego

Lemat

Załóżmy, że szereg warunkowo zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ posiada dwa liniowo niezależne wektory Leviego u, v. Wtedy $span^{+}(u, v) \subset \mathbb{A}_{abs}(x_n) = \{\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \|x_n\| < \infty\}$.

Twierdzenie

Załóżmy, że szereg warunkowo zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ posiada wektor Leviego na każdej otwartej półsferze jednostkowej. Wówczas $\mathbb{A}_{abs}(x_n) = \mathbb{R}^2$.

Twierdzenie

Załóżmy, że szereg warunkowo zbieżny $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ posiada przynajmniej trzy wektory Leviego. Wówczas $\mathbb{A}_{abs}(x_n) = \mathbb{R}^2$.

Dwa wektory Leviego

Dwa wektory Leviego

Własność redukcji

Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$ posiada *własność redukcji* gdy $\lim_{n\to\infty}\frac{|y_n|}{|x_n|} = \infty$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $N \in \mathbb{N}$ istnieje skończony zbiór indeksów $A = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_m\}$ gdzie $k_1 \geq N$ taki, że $|\sum_{n\in A} x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$; $\max_{1\leq j\leq m} |\sum_{n=1}^{j} x_{k_n}| < \varepsilon$ oraz $\max_{1\leq j\leq m} |\sum_{n=1}^{j} y_{k_n}| < \varepsilon$.

Dwa wektory Leviego

Własność redukcji

Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$ posiada *własność redukcji* gdy $\lim_{n\to\infty}\frac{|y_n|}{|x_n|} = \infty$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $N \in \mathbb{N}$ istnieje skończony zbiór indeksów $A = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_m\}$ gdzie $k_1 \geq N$ taki, że $|\sum_{n\in A} x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$; $\max_{1\leq j\leq m}|\sum_{n=1}^{j} x_{k_n}| < \varepsilon$ oraz $\max_{1\leq j\leq m}|\sum_{n=1}^{j} y_{k_n}| < \varepsilon$.

Własności

Załóżmy, że warunkowo zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$ posiada własność redukcji. Wtedy:

- $SR(x_n, y_n) = \mathbb{R}^2$

Dwa wektory Leviego

Własność redukcji

Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$ posiada *własność redukcji* gdy $\lim_{n\to\infty}\frac{|y_n|}{|x_n|} = \infty$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $N \in \mathbb{N}$ istnieje skończony zbiór indeksów $A = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_m\}$ gdzie $k_1 \geq N$ taki, że $|\sum_{n\in A} x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$; $\max_{1\leq j\leq m}|\sum_{n=1}^{j} x_{k_n}| < \varepsilon$ oraz $\max_{1\leq j\leq m}|\sum_{n=1}^{j} y_{k_n}| < \varepsilon$.

Własności

Załóżmy, że warunkowo zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$ posiada własność redukcji. Wtedy:

- $SR(x_n, y_n) = \mathbb{R}^2$
- $L(x_n, y_n) = \{(0,1), (0,-1)\}$

Dwa wektory Leviego

Własność redukcji

Powiemy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$ posiada *własność redukcji* gdy $\lim_{n\to\infty}\frac{|y_n|}{|x_n|} = \infty$ oraz dla każdego $\varepsilon > 0$, $x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $N \in \mathbb{N}$ istnieje skończony zbiór indeksów $A = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_m\}$ gdzie $k_1 \geq N$ taki, że $|\sum_{n\in A} x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$; $\max_{1\leq j\leq m}|\sum_{n=1}^{j} x_{k_n}| < \varepsilon$ oraz $\max_{1\leq j\leq m}|\sum_{n=1}^{j} y_{k_n}| < \varepsilon$.

Własności

Załóżmy, że warunkowo zbieżny szereg $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y_n)$ posiada własność redukcji. Wtedy:

- $SR(x_n, y_n) = \mathbb{R}^2$
- $L(x_n, y_n) = \{(0,1),(0,-1)\}$
- $A(x_n, y_n) = \mathbb{R}^2$

Przykładowa klasa szeregów o własności redukcji

Przykładowa klasa szeregów o własności redukcji

Konstrukcja

Niech $(x_n), (y_n)$ będą nierosnącymi ciągami liczb dodatnich zbieżnymi do 0 oraz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|y_n|}{|x_n|} = \infty$. Zdefiniujmy $v_{4n-3} = (-x_{2n-1}, -y_{2n-1})$, $v_{4n-2} = (-x_{2n-1}, y_{2n-1})$, $v_{4n-1} = (x_{2n}, y_{2n})$, $v_{4n} = (x_{2n}, -y_{2n})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $A(v_n) = \mathbb{R}^2$.

Przykładowa klasa szeregów o własności redukcji

Konstrukcja

Niech $(x_n), (y_n)$ będą nierosnącymi ciągami liczb dodatnich zbieżnymi do 0 oraz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = \infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|y_n|}{|x_n|} = \infty$. Zdefiniujmy $v_{4n-3} = (-x_{2n-1}, -y_{2n-1})$, $v_{4n-2} = (-x_{2n-1}, y_{2n-1})$, $v_{4n-1} = (x_{2n}, y_{2n})$, $v_{4n} = (x_{2n}, -y_{2n})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $A(v_n) = \mathbb{R}^2$.

Przykład

Niech $v_{2n-1} = (x_{2n-1}, y_{2n-1}) = \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$, $v_{2n} = (x_{2n}, y_{2n}) = \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right)$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $L(v_n) = \{(0,1), (0,-1)\}$, $SR(v_n) = \mathbb{R}^2$ oraz $A(v_n) = \mathbb{R}^2$.

Dwa wektory Leviego i $A_{abs}(v_n) \neq A(v_n)$ 1

Dwa wektory Leviego i $A_{abs}(v_n) \neq A(v_n)$ 1

Lemat

Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ będzie warunkowo zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie bezwzględnie zbieżny, $x_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy $v_n = (x_n, y_n)$, wtedy

- $\mathbb{L}(v_n) = \{(0, 1), (0, -1)\}$

Lemat

Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ będzie warunkowo zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie bezwzględnie zbieżny, $x_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy $v_n = (x_n, y_n)$, wtedy

- $\mathbb{L}(v_n) = \{(0,1), (0,-1)\}$
- $SR(v_n) = span(\mathbb{L}(v_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$

Dwa wektory Leviego i $A_{abs}(v_n) \neq A(v_n)$ 1

Lemat

Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ będzie warunkowo zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie bezwzględnie zbieżny, $x_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy $v_n = (x_n, y_n)$, wtedy

- $\mathbb{L}(v_n) = \{(0,1),(0,-1)\}$
- $SR(v_n) = span(\mathbb{L}(v_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \in A(v_n) \setminus A_{abs}(v_n)$.

Przykład

Dwa wektory Leviego i $A_{abs}(v_n) \neq A(v_n)$ 1

Lemat

Niech szereg $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ będzie warunkowo zbieżny oraz $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie bezwzględnie zbieżny, $x_n > 0$ dla $n \in \mathbb{N}$. Rozważmy $v_n = (x_n, y_n)$, wtedy

- $\mathbb{L}(v_n) = \{(0,1),(0,-1)\}$
- $SR(v_n) = span(\mathbb{L}(v_n)) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n$
- $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \in A(v_n) \setminus A_{abs}(v_n)$.

Przykład

Niech $v_n = (\frac{1}{2^n}, \frac{(-1)^n}{n})$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy $(1, -\ln 2) \in A(v_n) \setminus A_{abs}(v_n)$.

Dwa wektory Leviego i $A_{abs}(v_n) \neq A(v_n)$ 2

Dwa wektory Leviego i $A_{abs}(v_n) \neq A(v_n)$ 2

Przykład

Niech $n_0 = 0$, $n_k = 4^{k^2} + n_{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $x_n = \frac{1}{4^{k^2}}$, $y_n = \frac{1}{2^k}$ dla $n \in (n_{k-1}, n_k]$ oraz połóżmy $v_{4n-3} = (-x_{2n-1}, -y_{2n-1})$, $v_{4n-2} = (-x_{2n-1}, y_{2n-1})$, $v_{4n-1} = (x_{2n}, y_{2n})$, $v_{4n} = (x_{2n}, -y_{2n})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

Dwa wektory Leviego i $A_{abs}(v_n) \neq A(v_n)$ 2

Przykład

Niech $n_0 = 0$, $n_k = 4^{k^2} + n_{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $x_n = \frac{1}{4^{k^2}}$, $y_n = \frac{1}{2^k}$ dla $n \in (n_{k-1}, n_k]$ oraz połóżmy $v_{4n-3} = (-x_{2n-1}, -y_{2n-1})$, $v_{4n-2} = (-x_{2n-1}, y_{2n-1})$, $v_{4n-1} = (x_{2n}, y_{2n})$, $v_{4n} = (x_{2n}, -y_{2n})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

- $\mathbb{L}(v_n) = \{(0,1),(0,-1)\}$

Przykład

Niech $n_0 = 0$, $n_k = 4^{k^2} + n_{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $x_n = \frac{1}{4^{k^2}}$, $y_n = \frac{1}{2^k}$ dla $n \in (n_{k-1}, n_k]$ oraz połóżmy $v_{4n-3} = (-x_{2n-1}, -y_{2n-1})$, $v_{4n-2} = (-x_{2n-1}, y_{2n-1})$, $v_{4n-1} = (x_{2n}, y_{2n})$, $v_{4n} = (x_{2n}, -y_{2n})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

- $\mathbb{L}(v_n) = \{(0,1), (0,-1)\}$
- $SR(v_n) = \mathbb{R}^2$

Dwa wektory Leviego i $A_{abs}(v_n) \neq A(v_n)$ 2

Przykład

Niech $n_0 = 0$, $n_k = 4^{k^2} + n_{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $x_n = \frac{1}{4^{k^2}}$, $y_n = \frac{1}{2^k}$ dla $n \in (n_{k-1}, n_k]$ oraz połóżmy $v_{4n-3} = (-x_{2n-1}, -y_{2n-1})$, $v_{4n-2} = (-x_{2n-1}, y_{2n-1})$, $v_{4n-1} = (x_{2n}, y_{2n})$, $v_{4n} = (x_{2n}, -y_{2n})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

- $\mathbb{L}(v_n) = \{(0,1), (0,-1)\}$
- $SR(v_n) = \mathbb{R}^2$
- $A(v_n) = \mathbb{R}^2$

Przykład

Niech $n_0 = 0$, $n_k = 4^{k^2} + n_{k-1}$ dla $k \in \mathbb{N}$. Zdefiniujmy $x_n = \frac{1}{4^{k^2}}$, $y_n = \frac{1}{2^k}$ dla $n \in (n_{k-1}, n_k]$ oraz położmy $v_{4n-3} = (-x_{2n-1}, -y_{2n-1})$, $v_{4n-2} = (-x_{2n-1}, y_{2n-1})$, $v_{4n-1} = (x_{2n}, y_{2n})$, $v_{4n} = (x_{2n}, -y_{2n})$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas

- $\mathbb{L}(v_n) = \{(0,1),(0,-1)\}$
- $SR(v_n) = \mathbb{R}^2$
- $A(v_n) = \mathbb{R}^2$
- $A_{abs}(v_n) \cap \{\frac{1}{3}\} \times \mathbb{R} = \emptyset$, więc $A_{abs}(v_n) \neq \mathbb{R}^2$.

Bibliografia

- T. Banakh, A. Bartoszewicz, M. Filipczak, E. Szymonik, Topological and measure properties of some self-similar sets, Topol. Methods Nonlinear Anal., 46(2) (2015), 1013–1028
- A. Bartoszewicz, S. Głąb, Achievement sets on the plane – perturbations of geometric and multigeometric series, Chaos Solitons Fractals 77 (2015) 84–93.
- A. Bartoszewicz, S. Głąb, J. Marchwicki, Achievement sets of conditionally convergent series, arXiv:1604.07575
- A. Bartoszewicz, M. Filipczak, F. Prus-Wiśniowski, Topological and algebraic aspects of subsums of series. Traditional and present-day topics in real analysis, 345–366, Faculty of Mathematics and Computer Science. University of Łódź, Łódź, 2013.
- A. Bartoszewicz, M. Filipczak, E. Szymonik, Multigeometric sequences and Cantorvals, Cent. Eur. J. Math. 12(7) (2014), 1000–1007.
- C. Ferens, On the range of purely atomic probability measures, Studia Math. 77 (1984), 261–263.
- J.A. Guthrie, J.E. Neymann, The topological structure of the set of subsums of an infinite series, Colloq. Math. 55:2 (1988), 323–327.
- R. Jones, Achievement sets of sequences, Am. Math. Mon. 118:6 (2011), 508–521.
- I. Halperin, Sums of series, permitting rearrangements,
- M. I. Kadets, V. M. Kadets, Series in Banach spaces. Conditional and unconditional convergence. Translated from the Russian by Andrei Iacob. Operator Theory: Advances and Applications, 94. Birkhd'ż˝user Verlag, Basel, 1997. viii+156 pp.

Bibliografia

- S. Kakeya, On the partial sums of an infinite series, Tôhoku Sic. Rep. 3 (1914), 159–164.
- P. Klinga, Rearranging series of vectors on a small set, J. Math. Anal. Appl. 424 (2015) 966–974.
- P. Mendes, F. Oliveira, On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets, Nonlinearity. 7 (1994), 329–343.
- M. Morán, Fractal series. Mathematika 36 (1989), no. 2, 334–348 (1990).
- M. Morán, Dimension functions for fractal sets associated to series. Proc. Amer. Math. Soc. 120 (1994), no. 3, 749–754.
- J.E. Neymann, R.A. Sáenz, On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series, Colloq. Math. 83 (2000), 1–4.
- Z. Nitecki, The subsum set of a null sequence, arXiv:1106.3779v1
- Z. Nitecki, Cantorvals and subsum sets of null sequences. Amer. Math. Monthly 122 (2015), no. 9, 862–870.
- A.D. Weinstein, B.E. Shapiro, On the structure of a set of $\overline{\alpha}$-representable numbers, Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika. 24 (1980), 8–11.