

Zbiory osiągalne dla szeregów warunkowo zbieżnych

Jacek Marchwicki

14.05.2016

Zbiór osiągalny

$$A(x_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

Zbiór osiągalny

$$A(x_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

Sum range

$$SR(x_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_{\infty} \right\}$$

Zbiór osiągalny

$$A(x_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

Sum range

$$SR(x_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_{\infty} \right\}$$

Związek między sum range i zbiorem osiągalnym

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie szeregiem warunkowo zbieżnym w przestrzeni Banacha X . Wówczas $SR(x_n) \subset \overline{A(x_n)}$.

Wstęp

Zbiór osiągalny

$$A(x_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n x_n : (\varepsilon_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

Sum range

$$SR(x_n) = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_{\infty} \right\}$$

Związek między sum range i zbiorem osiągalnym

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie szeregiem warunkowo zbieżnym w przestrzeni Banacha X . Wówczas $SR(x_n) \subset \overline{A(x_n)}$.

Wniosek

W przestrzeni skończenie wymiarowej zbiór osiągalny szeregu warunkowo zbieżnego jest nieograniczony.

Zbiory osiągalne nie muszą być domknięte

Zbiory osiągalne nie muszą być domknięte

Przykład

Rozważmy $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{1}{2^n} \right)$.

Zbiory osiągalne nie muszą być domknięte

Przykład

Rozważmy $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{1}{2^n} \right)$.

Domknięcie zbioru osiągalnego

$$\overline{A(x_n)} = \mathbb{R} \times [0, 1]$$

Zbiory osiągalne nie muszą być domknięte

Przykład

Rozważmy $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}, \frac{1}{2^n} \right)$.

Domknięcie zbioru osiągalnego

$$\overline{A(x_n)} = \mathbb{R} \times [0, 1]$$

Punkt ekstremalny zbioru osiągalnego

$$(z, 1) \in A(x_n) \Rightarrow z = \ln 2$$

Zbiory osiągalne nie muszą być domknięte - uogólnienie

Zbiory osiągalne nie muszą być domknięte - uogólnienie

Twierdzenie

Niech $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ będzie szeregiem warunkowo zbieżnym w $\mathbb{R}^k$ takim, że $SR(x_n) = \mathbb{R}^k$ oraz $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ będzie szeregiem zbieżnym bezwzględnie, przy czym $y_n \neq 0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $A(x_n, y_n)$ nie jest domknięty.

Szereg warunkowo zbieżny o ograniczonym zbiorze osiągalnym

Szereg warunkowo zbieżny o ograniczonym zbiorze osiągalnym

Przykład

Niech (e_n) będzie bazą kanoniczną w c_0 .

Kolejne wyrazy ciągu (x_n) to:

$$e_1, -e_1, \frac{1}{2}e_2, -\frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_2, -\frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_3, -\frac{1}{3}e_3, \frac{1}{3}e_3, -\frac{1}{3}e_3, \frac{1}{3}e_3, -\frac{1}{3}e_3, \dots$$

Szereg warunkowo zbieżny o ograniczonym zbiorze osiągalnym

Przykład

Niech (e_n) będzie bazą kanoniczną w c_0 .

Kolejne wyrazy ciągu (x_n) to:

$$e_1, -e_1, \frac{1}{2}e_2, -\frac{1}{2}e_2, \frac{1}{2}e_2, -\frac{1}{2}e_2, \frac{1}{3}e_3, -\frac{1}{3}e_3, \frac{1}{3}e_3, -\frac{1}{3}e_3, \frac{1}{3}e_3, -\frac{1}{3}e_3, \dots$$

Wnioski

Zbiór sum range jest jednopunktowy, istotnie $SR(x_n) = \{0\}$, natomiast zbiór osiągalny $A(x_n) = (\prod_{n=1}^{\infty} X_n) \cap c_0$, gdzie $X_n = \{ \frac{k}{n} : k \in [-n, n] \cap \mathbb{Z} \}$, więc jest ograniczony.

Dalsze zależności między sum range i zbiorem osiągalnym

Dalsze zależności między sum range i zbiorem osiągalnym

Twierdzenie

Niech (x_n) będzie ciągiem w $\mathbb{R}^k$ takim, że $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest warunkowo zbieżny oraz $SR(x_n) = \mathbb{R}^k$. Niech (y_n) będzie ciągiem w $\mathbb{R}^m$ takim, że $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest zbieżny bezwzględnie. Wówczas $\overline{A(x_n, y_n)} = \mathbb{R}^k \times A(y_n)$.

Dalsze zależności między sum range i zbiorem osiągalnym

Twierdzenie

Niech (x_n) będzie ciągiem w $\mathbb{R}^k$ takim, że $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest warunkowo zbieżny oraz $SR(x_n) = \mathbb{R}^k$. Niech (y_n) będzie ciągiem w $\mathbb{R}^m$ takim, że $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ jest zbieżny bezwzględnie. Wówczas $\overline{A(x_n, y_n)} = \mathbb{R}^k \times A(y_n)$.

Twierdzenie

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ jest warunkowo zbieżny w $\mathbb{R}^k$ oraz $\overline{A(x_n)} = \mathbb{R}^k$ to $SR(x_n) = \mathbb{R}^k$.

Duży sum range i mały zbiór osiągalny

Duży sum range i mały zbiór osiągalny

Przykład

Niech $x_i = \frac{(-1)^i}{2^{10k^2}}$ oraz $y_i = \frac{(-1)^i}{2^k}$ dla $i \in (n_{k-1}, n_k]$, gdzie $n_0 = 0$ i $n_{k+1} = n_k + 2^{10k^2} + 1$.

Duży sum range i mały zbiór osiągalny

Przykład

Niech $x_i = \frac{(-1)^i}{2^{10^{k^2}}}$ oraz $y_i = \frac{(-1)^i}{2^k}$ dla $i \in (n_{k-1}, n_k]$, gdzie $n_0 = 0$ i $n_{k+1} = n_k + 2^{10^{k^2}+1}$.

Zbiór osiągalny i sum range

- $SR(x_n, y_n) = \mathbb{R}^2$
- $A(x_n, y_n) \subseteq (L \cup \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}$, gdzie $L = \{x : \forall r \in \mathbb{N} \exists p, q \in \mathbb{Z} (0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^r})\}$ jest zbiorem wszystkich liczb Louville'a.

Duży sum range i mały zbiór osiągalny

Przykład

Niech $x_i = \frac{(-1)^i}{2^{10k^2}}$ oraz $y_i = \frac{(-1)^i}{2^k}$ dla $i \in (n_{k-1}, n_k]$, gdzie $n_0 = 0$ i $n_{k+1} = n_k + 2^{10k^2} + 1$.

Zbiór osiągalny i sum range

- $SR(x_n, y_n) = \mathbb{R}^2$
- $A(x_n, y_n) \subseteq (L \cup \mathbb{Q}) \times \mathbb{R}$, gdzie $L = \{x : \forall r \in \mathbb{N} \exists p, q \in \mathbb{Z} (0 < |x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^r})\}$ jest zbiorem wszystkich liczb Louville'a.

Wniosek

Możemy skonstruować szereg, którego sum range jest całą płaszczyzną, a zbiór osiągalny zbiorem miary zero.

„Prawie” otwarty zbiór osiągalny

„Prawie” otwarty zbiór osiągalny

Twierdzenie

Niech $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = X < \infty$ będzie szeregiem o wyrazach nieujemnych $x_k > 0$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz spełnia warunek:

- (i) dla dowolnego $a \in (0, 2X)$ istnieje przedział $I_a \subseteq A(x_k)$ taki, że dla każdego $t \in I_a$ istnieje $z \in A(x_k)$ takie, że $t + z = a$

Niech (y_k) będzie warunkowo zbieżny o sumie $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = Y$. Wówczas $A(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = (0, 2X) \times \mathbb{R} \cup \{(0, 0), (2X, Y)\}$, gdzie $\bar{x}_{2k-1} = \bar{x}_{2k} = x_k$ oraz $\bar{y}_{2k-1} = y_k, \bar{y}_{2k} = 0$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

„Prawie” otwarty zbiór osiągalny

Twierdzenie

Niech $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = X < \infty$ będzie szeregiem o wyrazach nieujemnych $x_k > 0$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz spełnia warunek:

- (i) dla dowolnego $a \in (0, 2X)$ istnieje przedział $I_a \subseteq A(x_k)$ taki, że dla każdego $t \in I_a$ istnieje $z \in A(x_k)$ takie, że $t + z = a$

Niech (y_k) będzie warunkowo zbieżny o sumie $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = Y$. Wówczas $A(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = (0, 2X) \times \mathbb{R} \cup \{(0, 0), (2X, Y)\}$, gdzie $\bar{x}_{2k-1} = \bar{x}_{2k} = x_k$ oraz $\bar{y}_{2k-1} = y_k, \bar{y}_{2k} = 0$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Przykład

Niech $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\frac{1}{2}, 1), (\frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}), (\frac{1}{4}, 0), (\frac{1}{8}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{8}, 0), (\frac{1}{16}, -\frac{1}{4}), (\frac{1}{16}, 0), \dots)$. Wówczas $A(x_n, y_n) = (0, 2) \times \mathbb{R} \cup \{(0, 0), (2, \ln 2)\}$.

Otwarty zbiór osiągalny

Otwarty zbiór osiągalny

Twierdzenie

Niech $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = X < \infty$ będzie szeregiem o wyrazach nieujemnych $x_k > 0$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $A(x_k) - A(x_k) = [-X, X]$. Niech (y_k) będzie ciągiem liczb nieujemnych, monotonicznie zbieżnym do 0 takim, że $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \infty$. Wówczas $A(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = (-2X, 2X) \times \mathbb{R}$, gdzie $\bar{x}_{4k-3} = \bar{x}_{4k-2} = x_k$, $\bar{x}_{4k-1} = \bar{x}_{4k} = -x_k$ oraz $\bar{y}_{4k-3} = \bar{y}_{4k-1} = 0$, $\bar{y}_{4k-2} = y_{2k-1}$, $\bar{y}_{4k} = -y_{2k}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Otwarty zbiór osiągalny

Twierdzenie

Niech $\sum_{k=1}^{\infty} x_k = X < \infty$ będzie szeregiem o wyrazach nieujemnych $x_k > 0$ dla $k \in \mathbb{N}$ oraz $A(x_k) - A(x_k) = [-X, X]$. Niech (y_k) będzie ciągiem liczb nieujemnych, monotonicznie zbieżnym do 0 takim, że $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \infty$. Wówczas $A(\bar{x}_k, \bar{y}_k) = (-2X, 2X) \times \mathbb{R}$, gdzie $\bar{x}_{4k-3} = \bar{x}_{4k-2} = x_k$, $\bar{x}_{4k-1} = \bar{x}_{4k} = -x_k$ oraz $\bar{y}_{4k-3} = \bar{y}_{4k-1} = 0$, $\bar{y}_{4k-2} = y_{2k-1}$, $\bar{y}_{4k} = -y_{2k}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$.

Przykład

Niech $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((\frac{2}{3}, 0), (\frac{2}{3}, 1), (-\frac{2}{3}, 0), (-\frac{2}{3}, -\frac{1}{2}), (\frac{2}{9}, 0), (\frac{2}{9}, \frac{1}{3}), (-\frac{2}{9}, 0), (-\frac{2}{9}, -\frac{1}{4}), \dots)$. Wówczas $A(x_n, y_n) = (-2, 2) \times \mathbb{R}$.

Bibliografia



T. Banach, A. Bartoszewicz, M. Filipczak, E. Szymonik, Topological and measure properties of some self-similar sets, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 46(2) (2015), 1013–1028



T. Banach, A. Bartoszewicz, S. Głąb, E. Szymonik, Algebraic and topological properties of some sets in ℓ_1 , *Colloq. Math.* 129 (2012), 75–85.



T. Banach, A. Bartoszewicz, S. Głąb, E. Szymonik, Erratum to "Algebraic and topological properties of some sets in ℓ_1 " (*Colloq. Math.* 129 (2012), 75–85) *Colloq. Math.* 135 (2014), no. 2, 295–298.



A. Bartoszewicz, S. Głąb, Achievement sets on the plane – perturbations of geometric and multigeometric series, *Chaos Solitons Fractals* 77 (2015) 84–93.



A. Bartoszewicz, M. Filipczak, F. Prus-Wiśniowski, Topological and algebraic aspects of subsums of series. Traditional and present-day topics in real analysis, 345–366, *Faculty of Mathematics and Computer Science. University of Łódź, Łódź*, 2013.



A. Bartoszewicz, M. Filipczak, E. Szymonik, Multigeometric sequences and Cantorvals, *Cent. Eur. J. Math.* 12(7) (2014), 1000–1007.



M.P. Cohen, The descriptive complexity of series rearrangements. *Real Anal. Exchange* 38 (2012/13), no. 2, 337–352.



C. Ferens, On the range of purely atomic probability measures, *Studia Math.* 77 (1984), 261–263.



J.A. Guthrie, J.E. Neymann, The topological structure of the set of subsums of an infinite series, *Colloq. Math.* 55:2 (1988), 323–327.



R. Jones, Achievement sets of sequences, *Am. Math. Mon.* 118:6 (2011), 508–521.

Bibliografia - ciąg dalszy



M. I. Kadets, V. M. Kadets, *Series in Banach spaces. Conditional and unconditional convergence*. Translated from the Russian by Andrei Iacob. *Operator Theory: Advances and Applications*, 94. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997. viii+156 pp.



S. Kakeya, On the partial sums of an infinite series, *Tôhoku Sic. Rep.* 3 (1914), 159–164.



A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*. Springer, New York (1995).



P. Mendes, F. Oliveira, On the topological structure of the arithmetic sum of two Cantor sets, *Nonlinearity*. 7 (1994), 329–343.



M. Morán, Fractal series. *Mathematika* 36 (1989), no. 2, 334–348 (1990).



M. Morán, Dimension functions for fractal sets associated to series. *Proc. Amer. Math. Soc.* 120 (1994), no. 3, 749–754.



J.E. Neymann, R.A. Sáenz, On the paper of Guthrie and Nymann on subsums of infinite series, *Colloq. Math.* 83 (2000), 1–4.



Z. Nitecki, The subsum set of a null sequence, *arXiv:1106.3779v1*



Z. Nitecki, Cantorvals and subsum sets of null sequences. *Amer. Math. Monthly* 122 (2015), no. 9, 862–870.



A.D. Weinstein, B.E. Shapiro, On the structure of a set of $\overline{\alpha}$ -representable numbers, *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika*. 24 (1980), 8–11.