Janusz Kaczmarek
Katedra Logiki i Metodologii Nauk
Uniwersytet Łódzki
kaczmarek@filozof.uni.lodz.pl

Modelowanie przedmiotów ontologii przy pomocy pojęć topologicznych

1. **Leukippos, Demokryt** (Vorsocr. A.6 i A.9, por. Legowicz 1970: 95 - 96)

Wczytując się we fragmenty przedsokratyków Leukipposa (V w. p.n.e.) i Demokryta (ok. 460 – 370 p.n.e.) możemy wyłowić następujące tezy dotyczące elementarnych składników rzeczywistości.

1. Elementami są pełnia i próżnia.
2. Pełnia jest bytem.
3. Próżnia jest niebytem.
4. Byt nie istnieje bardziej niż niebyt (bo próżnia nie istnieje mniej niż (pełne) ciało).
5. Pełnia i próżnia to materialne przyczyny rzeczy istniejących.

Z kolei o atomach, z których składają się rzeczy złożone, twierdzili:

6. Atomy to niepodzielne ciała
7. Z nich składają się inne ciała
8. Atomy są nieskończone co do liczby i kształtu
9. Przyczynami zmian w rzeczach istniejących w świecie są różnice atomów (bądź różnice w konfiguracjach)

kształt – A i N różnią się kształtem
szyk – AN różni się od NA
położenie – Z różni się położeniem od N

10. Łączenie się i rozdzielanie atomów jest przyczyną powstawania i zanikania (rzeczy)
11. Zmiana szyku bądź położenia jest przyczyną zmiany w rzeczach (np. ZEN, ZEZ – KAT, TKA, AKT)
12. „Z tych samych liter powstaje zarówno tragedia, jak i komedia” (Legowicz 1970: 96)

2. Przykład: formuły języka zdaniowego

$p \rightarrow q$ oraz $q \rightarrow p$
p oraz q
$p \vee q$ oraz $p \wedge q$

3. Twierdzenia Arystotelesa o substancji pierwszej

13. Substancja (…) jest tym, co ani nie może być orzekane o podmiocie, ani nie może znajdować się w podmiocie.
14. Substancja oznacza pewne „to” (w odróżnieniu od substancji drugiej, która nie oznacza pewnego „to”, ale raczej pewną jakość).
15. Substancja jest niepodzielna i numerycznie jedna.
16. Substancja nie ma swego przeciwieństwa.

17. Substancja nie dopuszcza stopniowania „bardziej”, „mniej”.
18. Substancja, jako będąca zawsze tym samym i będąc liczbowo jedna, jest zdolna do przyjmowania przeciwieństw (np. Sokrates jest zdrowy, Sokrates jest chory).

Choć moglibyśmy podać jeszcze wiele innych tez (np. o złożeniu substancji z formy i materii), odnotujmy tylko następującą:

19. Substancja wyposażona jest w wewnętrzną energię celową (duszę, *entelechię*), która stanowi o byciu taką a taką substancją.

4. Przykłady:

Sokrates, pies Burek, dąb Bartek

5. Twierdzenia o monadzie i substancji złożonej wg Leibniza

20. Monada jest jednością.
21. Monada jest prosta.
22. Monada jest nierozkładalna.
23. Monada nie ma kształtu, wymiarów, rozciągłości.
24. Monada jest atomem ontologicznym, nie punktem matematycznym lub fizycznym.
25. Monada posiada jakości (cechy, własności).

26. Monada posiada percepcje.
27. W monadzie działa wewnętrzna zasada – dążność – pozwalająca przechodzić od jednych percepcji do drugich.

Z kolei tezy charakteryzujące substancję są następujące.

28. Substancja jest mnogością (agregatem) monad.
29. Substancja posiada monadę dominującą.
30. Monada dominująca zapewnia jedność substancji.

6. Przykłady

monada centralna (Bóg), Leibniz przykładów nie podaje; przykładem substancji złożonej jest dla niego owca (agregatum monad z wyróżnioną monadą dominującą, którą ma być dusza wegetatywno – zmysłowa)

7. Twierdzenia o systemie wg Bocheńskiego

7.1) System składa się z elementów realnych i/lub idealnych
7.2) System posiada zasadę jednoczącą (tworzącą z elementów jedność, system)
7.3) System może wchodzić w skład systemu szerszego
7.4) System może zawierać podsystemy
7.5) Relacje między elementami systemu to tzw. relacje wewnętrzne; relacje systemu lub jego elementów z innymi systemami lub ich elementami to relacje zewnętrzne

8. Przykłady systemów

batalion pancerny, PŁ, system geometrii Euklidesa; człowiek (jako system systemów: układ pokarmowy, układ nerwowy, układ krążenia, system poznawczy, system wolitywny)

9. Pojęcia topologiczne wykorzystywane do modelowania substancji

Topological space

Let X be a set (not necessarily nonempty) and T_X a family of subsets of X. A pair (X, T_X) is a topology or a topological space on X, if the following conditions are fulfilled:

a) $\varnothing \in T_X$ and $X \in T_X$,
b) if $A_1, A_2, \ldots \in T_X$, then $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \in T_X$,
c) if $A_1, A_2 \in T_X$, then $A_1 \cap A_2 \in T_X$.

Examples of topologies.

τ1. If $X = \varnothing$, then $(\varnothing, \{\varnothing\})$ is topological space.

τ2. If $X = \{1; 2\}$, then $(X, \{\varnothing, \{1\}, X\})$ and $(X, \{\varnothing, \{2\}, X\})$ are topological spaces. They are known as *Sierpiński's spaces*.

τ3. If $X = R$, R is the set of real numbers, and any set of T_R is an union of sets in form $(r_1; r_2)$, for $r_i \in R$, then (R, T_R) is topological space called *natural topology on R*.

τ4. If $X = R$ and $\varnothing \neq A \subset X$, then $(X, \{\varnothing, A, X - A, X\})$ is topological space.

τ5. For any set X the *discrete topology* on X is the topology $T_d$such that $T_d = \{U: U \subseteq X\}$, so the collection of open sets of T_d equals the power set of X, i.e. $T_d = P(X)$. Next, the *indiscrete topology* (or *trivial topology*) on X is the topology T_{triv} such that $T_i = \{\emptyset, X\}$.

τ6. For $X = \{1, 2, 3\}$ we can define 29 topologies on X. Here are some of them:

τ6.1. $T_X = \{\emptyset, \{1, 2\}, X\}$,
τ6.2. $\{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, X\}$,
τ6.3. $\{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, X\}$,
τ6.4. Naturally we can define on X the topology T_d and T_i.

In the paper I try to explain why this kind of topologies is important for ontological investigations. Now, let us notice that all topological spaces on the given set X can be ordered by the "weaker than" or "stronger than" relation. We define: for two topologies T and T'on X we say that T is *weaker* (or *coarser*) than T' (equivalently: that T' is *stronger* or *finer* than T) if $T \subset T'$(we write: $(X, T) \leq (X, T)$). It means that each open set from T is also an open set in T'. Of course, for any set X and any topology T on X we have:

$$T_i \subset T \subset T_d \text{ (or: } (X, T_i) \leq (X, T) \leq (X, T_d)).$$

Separation axioms

In general topology the so called *separation axioms* are introduced. These define which kind of topological objects can be separated. For example, let us remember the axioms T_0, T_1, T_2, T_4.

Let (X, T_X) be a topological space. Then:

SA. 0. (X, T_X) is T_0 *space* (or *fulfils condition* T_0) if for any $x, y \in X$, $x \neq y$, either exists an open set U such that $x \in U$ and $y \notin U$ or exists an open set U such that $x \notin U$ and $y \in U$.

SA. 1. (X, T_X)) is T_1 *space* if for any $x, y \in X$, $x \neq y$, exists an open set U such that $x \in U$ and $y \notin U$ and exists an open set V such that $x \notin V$ and $y \in V$.

SA. 2. (X, T_X)) is T_2 *space* (or *Hausdorff space*) if for any $x, y \in X$, $x \neq y$, exist open sets U and V with $U \cap V = \emptyset$ such that $x \in U$ and $y \in V$.

SA. 4. (X, T_X) is T_4 *space* (or *normal space*) if (X, T_X)) is T_1 space and for any closed sets $E, F \subseteq X$, $E \cap F = \emptyset$, exist open sets U and V such that $E \subset U$, $F \subset V$ and $U \cap V = \emptyset$.

The following simple theorems are true.

Fact 1. If(X, T_X) is T_i space, then (X, T_X) is T_j space, for $i, j \in \{0, ..., 6\}$ and $j<i$.
Fact 2. If (X, T_X) is T_i space, for $i = 0, 1, 2$ and $(X, T_X) \leq (Y, T_Y)$, then (Y, T_Y) is T_i space.

Examples: The topology given in τ6.1 i.e. $T_X = \{\emptyset, \{1, 2\}, X\}$ is not even T_0, because for 1 and 2 there is not an open set U such that $1 \in U$ and $2 \notin U$ or $1 \notin U$ and $2 \in U$. Sierpiński's spaces are T_0 but not T_1. The topology $(\{1, 2\}. \{\emptyset, \{1\}, \{2\},\{1, 2\}\})$ which is stronger than Sierpiński's space $(\{1, 2\}. \{\emptyset, \{1\},\{1, 2\}\})$ is T_1.In turn, the natural topology on R is normal and – hence – a Hausdorff space.

Topological subspace

Let (X, T_X) be a topological space and $A \subseteq X$. Then (A, T_A) is called *a subspace* of X, if

$$T_A = \{A \cap B: B \in T_X\}.$$

T_A is usually called the *subspace topology* on A.

Let us notice that

Fact 3. If (X, T_X) is a topological space fulfilling T_i axiom, $i = 0, 1, ..., 6$, and (A, T_A) is a subspace of (X, T_X), then (A, T_A) fulfils T_i.

Examples. Consider the natural topology (R, T_R) and a set <0, 1>. Then the family

$$T_{<0,\,1>} = \{A\colon A = U \cap <0, 1> \text{ and } U \in T_R\}$$

is the topology on <0, 1>. Let us remark, for example, that the set <0, ½) is open in the given subspace but neither open nor closed in the natural topology on R. Next, the set <0, 1> is closed in the natural topology and both open and closed in subspace on <0, 1>. If now, we consider the topology $T_X = \{\varnothing, \{1, 2\}, X\}$, where $X = \{1, 2, 3\}$, then subspace on the set {1, 2}is trivial and subspace on {1, 3} is Sierpiński's space with topology$\{\varnothing, \{1\}, \{1, 3\}\}$.

10. Definicja substancji złożonej

Topological definition of substance

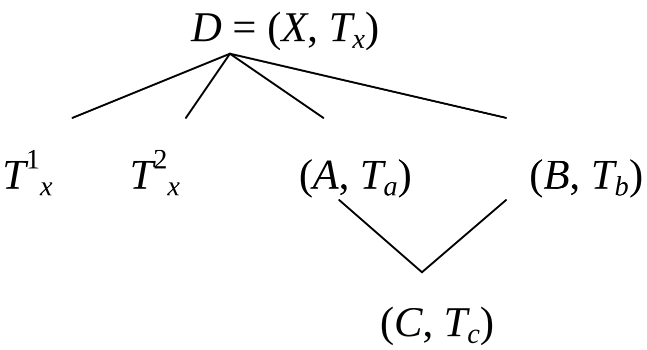
Let $D = (X, T_x)$ be a topology on X. I propose to define a *substance S in Leibniz sense* as a family $\mathcal{F}_S$ such that:

1) $D \in \mathcal{F}_S$,

2) if $M \in \mathcal{F}_S$, then M is a subspace of D or $M \leq D$.

In this definition, the topology D we call a dominant substance.

Let $D = (X, T_x)$ be a dominant monad and T^1_x, T^2_x two topologies weaker than D and such that $\sim(T^1_x \leq T^2_x)$ and $\sim(T^2_x \leq T^1_x)$. Moreover, let (A, T_a), (B, T_b), (C, T_c) be subspaces of $D = (X, T_x)$, and $A \subset X$, $B \subset X$, $C \subset A \cap B$. At that time our substance take the form of:



11. Twierdzenia o substancji złożonej jako układu topologii

Fact 4. Each monad (topology) is a substance in Leibniz's sense.
Fact 5. A monad is a one-element substance. In this case it is dominant for itself.
Fact 6. In a substance $\mathcal{F}_S$ having two or more elements one can distinguish other substances.
Example.

Taking into account the picture above, the families (1) D, (A, T_a), (C, T_c) and (2) (A, T_a), (C, T_c) are substances.

Fact 7. Two substances S_1 and S_2 are identical if and only if $\mathcal{F}_{S1} = \mathcal{F}_{S2}$.
Fact 8. Each substance $\mathcal{F}_S$ has only one dominant monad.

12. Interpretacja percepcji i dążności

1) the set X of a given topological space (X, T_x) is a set of *atomic perceptions* (or – perhaps – unity of information or atomic state of affairs);
2) any set $A \subset X$ I will call *possible perception* of a given monad (i.e. our perceptions are compound, complex, also in the form of $\{x\}$);
3) let *int* and *cl* denote interior and closure operator; *intA* (interior of A) is defined as a the biggest open set included in A; *clA* (closure of A) is defined as a the smallest closed set including A; then, because $A \in T_x$ is open set (i.e. $intA = A$) and $intA \subseteq A \subseteq clA$, for any subset $A \subseteq X$, I call (or interpret or model) *intA*, and hence any $A \in T_x$, an *essential perception* of a given monad; now let us remark that atomic perceptions are not perceptions, but if $x \in X$, then $\{x\}$ is a perception;
4) if $A = clA$, then the set AI call (or interpret as) *complete* or *closed perception*;
5) all operations on sets of the given topology, such as union, intersection, set difference, complement, interior, closure and others, I consider as *elements* or *components* of the interior force of monad (appetition); so the action of monad is, for example, transition from A and B, to $A \cup B$, $A \cap B$, $X - A$, clA etc.; the result of this action is also perception;

6) if topology (monad) (A, T_a) is weaker than (A, T'_a), then I propose to establish that (A, T'_a) has *highly seasoned* or *more distinct* or *more individualized* perceptions (cf. Leibniz (1714), point 25 and 19). In fact, for example in a T_2 topology on X and any $x, y \in X$, one can find two perceptions A and B, such that $x \in A$ and $y \in B$, but in T_1 topology it is impossible;
7) in the case of subspaces we observe that when (A, T_a) is a subspace of (X, T_x), then each perception $B \in T_a$ can represent by a perception $C \in T_x$ and set $A \subset X$ as $C \cap A$. Hence, also in this case we can say that what is observable in (A, T_a) is also observable in (X, T_x) (the problem is: what kind of perception is $C \cap A$ in (X, T_x) if C is neither open nor closed in (X, T_x)); from **Fact 3**. we get that in (A, T_a) we have not more and not less distinct perceptions than in (X, T_x) but in the first we have perceptions reduced to A.

To depict the action of a given monad-topology in the presented sense, let us consider the following:

Example. Let $X = \{1, ..., 10\}$ and T_x be a topology on X defined as

$$T_x = \{\varnothing, X, A, B, C, A \cup B, C \cup A, C \cup B\},$$

where $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$, $C = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

In this case we say, inter alia, that X can be presented as the union of A, B and C. It means that in X we can distinguish some perceptions A, B, C, so that we can understand X as the sum of A, B, C (in this way it becomes our knowledge on X: X is something that consists of A, B and C). We can say also that (in our knowledge that A is not B. Why? Because $A \cap B = \varnothing$. This situation is similar to the situation of recognising of, for example, a tree and the construction of knowledge about it. We distinguish roots (A), trunk (B) and the crown of the tree (C). Then we see that the trunk is not the crown (because $B \cap C = \varnothing$). It is a possible interpretation of monad action. The interpretation of why monad maps a fragment of world. I gave here an example of poor topology that is not even T_0, but the way of action of this monad relocates on other monads and their ways of action.

To finish this fragment of the paper, let us remark that one can prove:

Fact 9. A dominant monad has the most distinct perceptions (in the sense of separation axioms); it means precisely that if (X, T_x) is a dominant monad of $\mathcal{F}_S$ and $(Y, T_y) \in \mathcal{F}_S$, then if (Y, T_y) is T_i space, for $i = 0, 1, 2$, then (X, T_x) is at least T_i space.

And one can also argue (because it is not a formal theorem) that:

Fact 10. The structure of substance is univocally given by properties of monads-topologies and the order “being weaker” and relation “being a subspace”.

I hope that the results given above are expected. Even the **Fact 6**. – however odd-looking – can be interpreted as a counterpart of the main proposition included in Point 70 of *Monadology*.

13. Wnioski

1. Wykorzystanie funkcji ciągłych i homeomorfizmów
2. Ontologiczna interpretacja różnych typów zbiorów (gęsty, nigdziegęsty, brzegowy, spójny itd.)
3. Porównywanie różnych złożonych substancji tj. rodzin typu $\mathcal{F}_S$

14. Bibliography

Aristotle (1933/1935), *Metaphysics*, (diff. eds., see: Harvard University Press, United States, *Metaphysics I - IX*, Loeb Classical Library No. 271, translated by Hugh Tredennick, *Metphysics X – XIV*. *Oeconomica*. *Magna Moralia*, Loeb Classical Library No. 287, translated by Hugh Tredennick and G. Cyril Armstrong).
Aristotle (1938), *Categories*, (diff. eds., see: *Categories*. *On Interpretation*. *Prior Analytics*, Harvard University Press, United States, Loeb Classical Library No. 325, translated by H. P. Cooke and Hugh Tredennick).
Bocheński J. M. (1993), *Przyczynek do filozofii przedsiębiorstwa przemysłowego* (*Contribution to Philosophy of Company*), [in:] idem, *Logika i filozofia* (*Logic and Philosophy*), Wydawnictwo Naukowe PWN (Scientific Publishing House PWN), Warszawa, s. 162-186.
Copleston F. (1958), *History of Philosophy*. *(Descartes to Leibniz)*, vol. IV, Newman Press

Husserl E. (1913), *Ideas Pertaining to a Pure Phenomenology and to a Phenomenological Philosophy—First Book: General Introduction to a Pure Phenomenology*, trans. F. Kersten. The Hague: Nijhoff (1982).
Kaczmarek J. (2008), *Indywidua. Idee. Pojęcia. Badania z zakresu ontologii sformalizowanej (Individuals. Ideas. Concepts. Investigation on Formalised Ontology)*, ed. by Wyd. Uniwersytetu Łódzkiego, pp. 283.
Kaczmarek J. (2008b), *What is a Formalized Ontology Today? An Example of IIC*, Bulletin of the Section of Logic, vol. 37, 3-4, pp. 233 – 244.
Kaczmarek J. (2016), *Atom ontologiczny: atom substancji* (*Ontological atom – atom of substance*), (to be appearingin:) Przegląd Filozoficzny no. 4 (2016).
Kuratowski K. (1977), *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, (wraz z dodatkiem R. Engelkinga: *Elementy topologii algebraicznej*), (*Introduction to Set Theory and Topology with a supplement by R. Engelking: Elements of algebraic topology*), PWN Warszawa, pp. 358 (see also: Kuratowski, *Topology*, vol. I, 1966, vol. II, 1968).
Leibniz G. W. F. (1714), *Monadology*, (see: J. Bennett, (trans.) *The Principles of Philosophy known as Monadolog y*, internet page: philpapers.org/rec/LEITPO-2), pp. 13.
Salamucha J. (1946), *Z historii jednego wyrazu („istota”)*, (*From History of one Expression (“Essence”*), Tygodnik Powszechny, R. 2, nr 7(48), s. 3-4.