O braku regularności pewnych topologii typu gęstości.

- Jacek Hejduk, UŁ.

Jeśli $\langle X, \tau \rangle$ jest przestrzenią topologiczną, to $\mathbb{K}(\tau)$, $Ba(\tau)$ oznaczają odpowiednio rodzinę zb. I kategorii oraz rodzinę zbiorów o własności Baire'a. Przez $\mathcal{L}$ ($\mathcal{L}^2$) oznaczamy zbiory mierzalne w sensie miary Lebesgue'a λ (λ_2) na prostej (płaszczyźnie). Przez $\mathbb{L}$ ($\mathbb{L}^2$) oznaczamy zbiory miary Lebesgue'a zero na prostej (płaszczyźnie). Niech Φ_d będzie operatorem gęstości na prostej a $\mathcal{B}$ ($\mathcal{B}^2$) rodziną zbiorów borelowskich na prostej (płaszczyźnie), $\Phi_{\mathcal{I}}$ - operator $\mathcal{I}$-gęstości na R. Niech $\langle X, S, J \rangle$ będzie dowolną przestrzenią mierzalną z wyróżnionym σ-ciałem S i σ-ideałem $J \subset S$.

Def. 1 Operator $\Phi : S \to S$ jest operatorem dolnej gęstości na (X, S, J), jeśli:

1° $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, $\Phi(X) = X$,

2° $\forall_{A \in S} \forall_{B \in S} \; \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$,

3° $\forall_{A \in S} \forall_{B \in S} \; A \triangle B \in J \Rightarrow \Phi(A) = \Phi(B)$,

4° $\forall_{A \in S} \; A \triangle \Phi(A) \in J$.

Wiadomo, że jeśli para $\langle S, J \rangle$ posiada własność S-mierzalnej otoczki w X, to rodzina

$$T_{\Phi} = \{A \in S : A \subset \Phi(A)\}$$

stanowi topologię, którą nazywamy topologią generowaną przez operator dolnej gęstości Φ.

Niech $\langle X, \tau \rangle$ będzie przestrzenią topologiczną oraz Φ operatorem dolnej gęstości na $(X, Ba(\tau), K(\tau))$, to wówczas zawsze Φ generuje topologię T_{Φ}, ponieważ para $(Ba(\tau), K(\tau))$ posiada własność $Ba(\tau)$-mierzalnej otoczki.

Często w rozważaniach pragniemy uzyskać topologię T_Φ taką, że

$$T_\Phi \supset \tau$$

Uwaga.

Jeśli $V \subset \Phi(V)$ ~~for every~~ dla każdego $V \in \tau$

to

i) $T_\Phi \supset \tau$ i $\langle X, \tau \rangle$ jest p. Bairé

ii) $\forall_{A \in Ba(\tau)} \left(A \triangle \Phi(A) \in K(\tau) \iff \Phi(A) - A \in K(\tau) \right)$

Uwagi o aksjomatach oddzielania.

<u>Twierdzenie 1.</u> Jeśli Φ jest operatorem dolnej gęstości na (R, Ba, K) i T_Φ jest topologią generowaną przez Φ taką, że $T_\Phi \supset \tau_{nat}$, to $\langle R, T_\Phi \rangle$ jest p. Hausdorffa i nie jest regularna

Twierdzenie 2. Niech $\langle X, \tau \rangle$ będzie p. topologiczną zawierającą τ-gęsty zbiór I kategorii. Jeśli Φ jest operatorem dolnej gęstości na $(X, Ba(\tau), K(\tau))$ generującym topologię $T_{\Phi} \supset \tau$, to $\langle X, T_{\Phi} \rangle$ nie jest przestrzenią regularną.

Przykład:

Niech $\forall_{A \in Ba} \; \Phi(A) = \begin{cases} R, & A \sim R \\ \Phi_I(A) \cap (R - Q), & \neg(A \sim R) \end{cases}$

Wówczas Φ jest operatorem dolnej gęstości na (R, Ba, K) i $\langle R, T_{\Phi} \rangle$ nie jest p. Hausdorffa.

czy można w tw. 1 zrezygnować „$T_{\Phi} \supset \tau$."

Twierdzenie 3. Niech $\langle X, \tau \rangle$ będzie p. topologiczną taką, że $K(\tau)$ zawiera singletony. Jeśli $\langle X, \tau \rangle$ posiada przeliczalną π-bazę, to dla dowolnego operatora dolnej gęstości Φ na $(X, Ba(\tau), K(\tau))$ przestrzeń $\langle X, T_{\Phi} \rangle$ nie jest regularna.

Wniosek. Jeśli Φ jest operatorem dolnej gęstości na $(\mathbb{R}, Ba, \mathbb{K})$, to przestrzeń top. $\langle \mathbb{R}, T_\Phi \rangle$ nie jest regularna.

Można poszukiwać najsłabszej topologii ϱ, aby

$$C(\langle \mathbb{R}, T_\Phi \rangle, \langle \mathbb{R}, \tau_{nat} \rangle) = C(\langle \mathbb{R}, \varrho \rangle, \langle \mathbb{R}, \tau_{nat} \rangle)$$

(odrębny temat).

Rozważmy przestrzeń mierzalną $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L})$

Twierdzenie 4. Jeśli $\Phi : \mathcal{L} \to 2^{\mathbb{R}}$ spełnia w-k $1^\circ - 3^\circ$ def. 1 na $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L})$ i Φ generuje topologię T_Φ, to przestrzeń top. $\langle \mathbb{R}, T_\Phi \rangle$ nie jest normalna

Wniosek. Jeśli $\Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ jest operatorem dolnej gęstości na $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L})$, to $\langle \mathbb{R}, T_\Phi \rangle$ nie jest normalna.

Uwaga. Badane przypadki operatorów dolnej gęstości Φ na $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L})$ generujące topologię $T_\Phi \supset \tau_{nat}$ posiadają tę własność, że przestrzenie top. $\langle \mathbb{R}, T_\Phi \rangle$ są całkowicie regularne.

Przykład 2.

$$\forall_{A \in \mathcal{L}} \quad \overline{\Phi}(A) = \begin{cases} \mathbb{R} & A \sim \mathbb{R} \\ \underline{\Phi}_d(A) \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}), & \neg(A \sim \mathbb{R}) \end{cases}$$

wówczas $\overline{\Phi}$ jest op. dolnej gęstości na $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L})$, ale przestrzeń $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\overline{\Phi}} \rangle$ nie jest przest. Hausdorffa. Oczywiście $\mathcal{T}_{nat} \setminus \mathcal{T}_{\overline{\Phi}} \neq \emptyset$.

Pytanie

Czy istnieje operator dolnej gęstości $\overline{\Phi}$ na $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L})$ taki, że $\mathcal{T}_{\overline{\Phi}} \supset \mathcal{T}_{nat}$ oraz przestrzeń $\langle \mathbb{R}, \mathcal{T}_{\overline{\Phi}} \rangle$ nie jest regularna ?

Odpowiedź: Przykład w p. $(\mathbb{R}^2, \mathcal{L}^2, \mathbb{L}^2)$ - prof. W. Wilczyńskiego:

Niech $B \in \mathcal{B}^2$

$$\overline{\Phi}_v(B) = \{\langle x, y \rangle \in \mathbb{R}^2 : y \in \underline{\Phi}_d(B_x)\}$$

czyli $\langle x, y \rangle \in \overline{\Phi}_v(B)$, jeśli $\langle x, y \rangle$ jest punktem liniowej gęstości zbioru B w kierunku y

Analogicznie

$$\overline{\Phi}_h(B) = \{\langle x, y \rangle : x \in \underline{\Phi}_d(B^y)\}$$

Twierdzenie 5 (Mauldin, 1982).
Jeśli $B \in \mathcal{B}^2$, to $D = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y \in \Phi_d(B_x)\}$ jest zbiorem borelowskim.

Definicja 2. Mówimy, że punkt $\langle x_0, y_0\rangle \in \mathbb{R}^2$ jest p. mieszanej gęstości zbioru $A \in \mathcal{L}^2$, jeśli istnieje zbiór borelowski $B \in \mathcal{B}^2$ taki, że $B \sim A$ oraz $\langle x_0, y_0\rangle \in \Phi_h(\Phi_v(B))$ co zapisujemy

$$\langle x_0, y_0\rangle \in \Phi_{xy}(A).$$

Dowodzi się, że zbiór $\Phi_{xy}(A)$ jest wyznaczony jednoznacznie, co opiera się na następujących lematach.

Lemat 1: Jeśli $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^2$ i $B_1 \sim B_2$ to $\Phi_v(B_1) \sim \Phi_v(B_2)$

Lemat 2. Jeśli $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^2$ i $B_1 \sim B_2$ to $(\Phi_v(B_1))^y \sim (\Phi_v(B_2))^y$ dla każdego $y \in \mathbb{R}$

Lemat 3. Jeśli $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^2$ i $B_1 \sim B_2$, to $\Phi_h(\Phi_v(B_1)) = \Phi_h(\Phi_v(B_2))$.

Twierdzenie 6. Operator $\Phi_{xy} : \mathcal{L}^2 \to \mathcal{L}^2$ jest operatorem dolnej gęstości na $(R^2, \mathcal{L}^2, \mathbb{L}^2)$, a ponadto $\Phi_{xy}(A) \in \mathcal{B}^2$ dla dowolnego $A \in \mathcal{L}^2$.

Uwaga: z tw. Mauldina $\Phi_{xy}(A) \in \mathcal{B}^2$ dla dowolnego $A \in \mathcal{L}^2$.

Uzasadnimy, że $A \sim \Phi_{xy}(A)$, $A \in \mathcal{L}^2$.

Twierdzenie 7 (Saks, „Zarys teorii całki", wyd. 1933) Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}^2$ p.w. punkty zbioru A są punktami liniowej gęstości w kierunku osi OX oraz osi OY.

Niech $A \in \mathcal{L}^2$ i niech $B \in \mathcal{B}^2$ będzie taki, że $A \sim B$. Wówczas z tw. 7 $\Phi_v(B) \sim B$ oraz $\Phi_h(\Phi_v(B)) \sim \Phi_v(B)$, więc $\Phi_h(\Phi_v(B)) \sim B \sim A$ czyli

$$A \sim \Phi_{xy}(A).$$

Oczywiście rodzina

$$\mathcal{T}_{xy} = \{A \in \mathcal{L}^2 : A \subset \Phi_{xy}(A)\}$$

stanowi topologię na $\mathbb{R}^2$, przy czym $\tau^2_{nat} \subset \mathcal{T}_{xy}$.

<u>Twierdzenie 8.</u> Przestrzeń topologiczna $\langle \mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{xy} \rangle$ jest p. Hausdorffa, ale nie jest regularna.

Szkic. Oczywiście p. $\langle \mathbb{R}^2, \mathcal{T}_{xy} \rangle$ jest p. Hausdorffa. Natomiast zbiór $A = \mathbb{R} \times \{0\} - \{\langle 0,0 \rangle\}$, który jest $\mathcal{T}_{xy}$-domknięty i punkt $\langle 0,0 \rangle \notin A$ nie mogą być oddzielone zbiorami $\mathcal{T}_{xy}$-otwartymi.

<u>Twierdzenie 9.</u> a) $\mathcal{T}_{xy} - \mathcal{T}_0 \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_0 - \mathcal{T}_{xy} \neq \emptyset$

b) $\mathcal{T}_{xy} - \mathcal{T}_s \neq \emptyset$, $\mathcal{T}_s - \mathcal{T}_{xy} \neq \emptyset$,

gdzie $\mathcal{T}_0$ – topologia zwykłej gęstości na $\mathbb{R}^2$

$\mathcal{T}_s$ – topologia silnej gęstości na $\mathbb{R}^2$

Przedstawione rozważania uzyskane do generowania topologii T_{xy} bazowały na operatorze Φ_{α} na przestrzeni $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathcal{U})$.

Pewne uogólnienia

Postulat 1. Niech $\Phi : \mathcal{L} \to 2^{\mathbb{R}}$ będzie operatorem spełniającym warunki:

1° $\Phi(\emptyset) = \emptyset$, $\Phi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

2° $\underset{A \in \mathcal{L}}{\forall} \ \underset{B \in \mathcal{L}}{\forall} \ \Phi(A \cap B) = \Phi(A) \cap \Phi(B)$

3° $\underset{A \in \mathcal{L}}{\forall} \ \underset{B \in \mathcal{L}}{\forall} \ A \sim B \Rightarrow \Phi(A) = \Phi(B)$

(operator pół-dolnej gęstości
semi-lower density)

Postulat 2. Jeżeli $B \in \mathcal{B}^2_1$, to

$D_x = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : y \in \Phi(B_x)\} \in \mathcal{B}$

$D^x = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{R}^2 : x \in \Phi(B^y)\} \in \mathcal{B}$

Postulat 3. Dla dowolnego zbioru $A \in \mathcal{L}^2$ p.w. punkty zbioru $A \in \mathcal{L}^2$ są punktami liniowej Φ-gęstości w kierunku OX i kierunku OY.

Przykłady

1° Φ_d — operator gęstości.

$A \in \mathcal{L}$

2° $x \in \Phi_{\langle s \rangle}(A) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda\left(A \cap \left[x-\frac{1}{s_n}; x+\frac{1}{s_n}\right]\right)}{\frac{2}{s_n}} = 1$

gdzie $\langle s \rangle = \{s_n\} \subset R_+$ i $s_n \nearrow \infty$

3° $x \in \Phi_J(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda(A \cap [x+J_n])}{|J_n|} = 1$

gdzie $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\{0\} \cup J_n) = 0$

i $\limsup \dfrac{\operatorname{dist}(0, J_n)}{|J_n|} < \infty$

4° $x_0 \in \Phi_{(f)}(A) \iff \lim\limits_{\substack{h\to 0,\, k\to 0 \\ h\geq 0,\, k\geq 0 \\ h+k>0}} \dfrac{\lambda(A \cap [x-h, x+k])}{f(h+k)}$

gdzie $f: R_+ \to R_+$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$,

f jest niemalejąca i

$0 < \liminf \dfrac{f(x)}{x} < \infty$.

Twierdzenie 10. Jeśli operator $\Phi: \mathcal{L} \to 2^R$ spełnia postulaty 1-3, to rodzina

$T_{xy} = \{A \in \mathcal{L}^2 : A \subset \Phi_h(\Phi_v(A))\}$ stanowi topologię na $\mathbb{R}^2$. Jeśli ponadto $V \subset \Phi(V)$ dla dowolnego $V \in \tau_{nat}$, to T_{xy} jest topologią Hausdorffa i T_{xy} nie jest regularna.

Jeśli w def. 1 warunek 4° zastąpimy

$4^{\circ\circ}$ $\forall_{A \in S}$ $\Phi(A) - A \in J$, to operator $\Phi: S \to 2^X$ nazywamy op. prawie dolnej gęstości na (X, S, J).

Twierdzenie 11. Jeśli $\Phi: S \to 2^X$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na (X, S, J), to rodzina $T_\Phi = \{A \in S : A \subset \Phi(A)\}$ stanowi topologię na X, gdzie para (S, J) posiada własności otoczki S-mierzalnej.

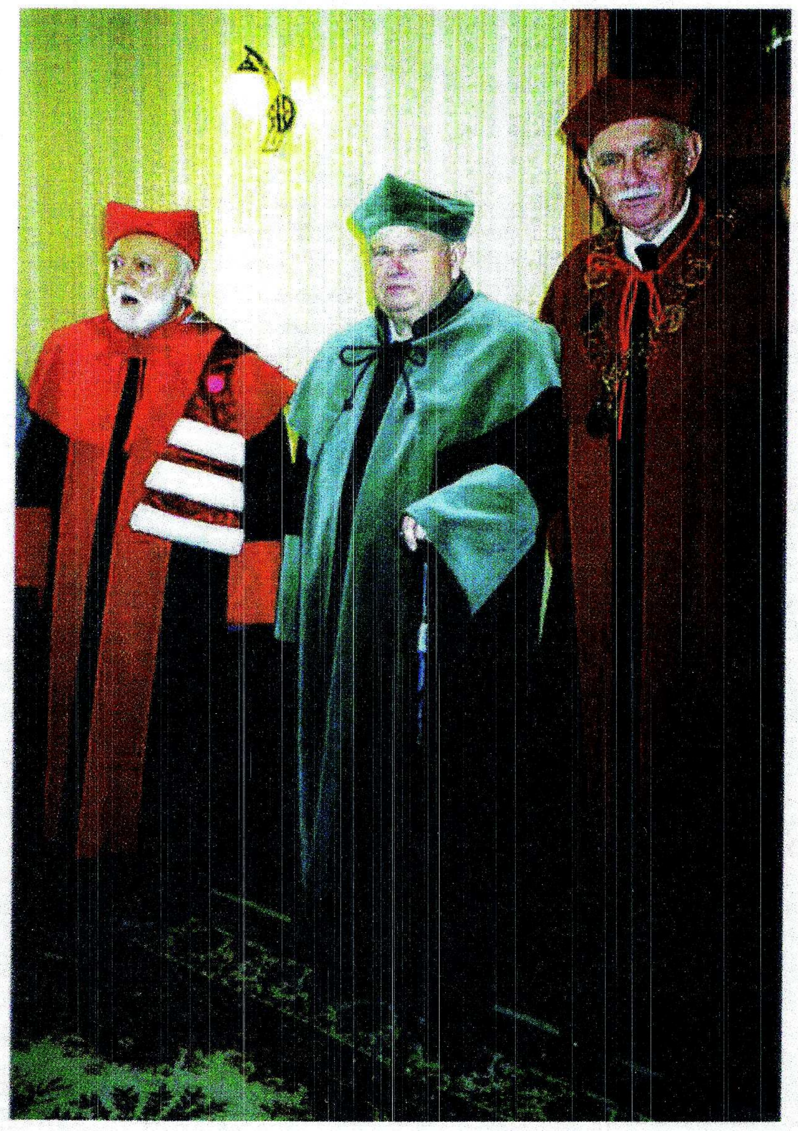
z tw. 4 i tt Wynika, że

Wniosek: Jeśli $\Phi : \mathcal{L} \to 2^{\mathbb{R}}$ jest operatorem prawie dolnej gęstości na $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L})$ to rodzina T_Φ generowana przez Φ stanowi topologię na $\mathbb{R}$, która nie jest normalna.

Pytanie. Czy istnieje operator prawie dolnej gęstości na $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \mathbb{L})$, który jest dolnej gęstości i generuje topologię T_Φ na $\mathbb{R}$ taką, że $\tau_{nat} \subset T_\Phi$ i $\langle \mathbb{R}, T_\Phi \rangle$ jest regularna?

Literature

1. S. Saks, Theory of integral, Monografie matematyczne, W-wa, Lwów, 1937.
2. R. D. Mauldin, One-to-one selections marriage theorems, Amer. J. Math 104(4), 1982, 823-828
3. W. Wilczyński, Mixed partial density topology, Bull. Soc. Sci Lettres, 2015.



Professors Julian Ławrynowicz and Leszek Wojtczak
(accompanied by Professor Antoni Różalski, Pro-Rector and President of the Łódź Society of Sciences and Arts) during the ceremony of renewing of their doctorates (1964) after 50 years

Odnowienie doktoratów
— prof. Juliana Ławrynowicza
— prof. Leszka Wojtczaka
w 2014 r. w towarzystwie
Rektora - Elekta UŁ prof. Antoniego Różalskiego.