O zbiorach rezydualnie "małych" w polskich grupach abelowych

Eliza Jabłońska

Zakład Matematyki Dyskretnej
Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej
Politechnika Rzeszowska

Zbiory zerowe Haara w polskiej grupie abelowej X

Definicja 1 (1972, Christensen)

Zbiór $A \subset X$ jest *zbiorem zerowym Haara*, jeśli istnieje taki uniwersalnie mierzalny zbiór $B \subset X$ zawierający A oraz taka probabilistyczna miara borelowska μ na X, że $\mu(x + B) = 0$ dla wszystkich $x \in X$.

- Rodzina zbiorów zerowych Haara tworzy σ-ideał.
- Gdy X jest lokalnie zwarta, pojęcie zbioru zerowego Haara jest równoważne pojęciu zbioru miary Haara zero.

- J.P.R. Christensen, *On sets of Haar measure zero in abelian Polish groups*, Israel J. Math. 13 (1972), 255-260.

Zbiory I-kat. Haara w polskiej grupie abelowej X

Definicja 2 (**2013, Darji**)

Zbiór $A \subset X$ nazywamy zbiorem *I-kat. Haara*, jeśli istnieje taki zbiór borelowski $B \subset X$ zawierający A, przestrzeń metryczna zwarta K oraz ciągła funkcja $f : K \to X$, że $f^{-1}(B + x)$ jest I-kat. Baire'a w K dla każdego $x \in X$.

- Rodzina zbiorów I-kat. Haara tworzy σ-ideał zawarty w σ-ideale zbiorów I-kat. Baire'a.
- Gdy X jest lokalnie zwarta, pojęcia zbioru I-kat. Haara oraz zbioru I-kat. Baire'a są równoważne.
- Gdy X nie jest lokalnie zwarta, rodzina zbiorów I-kat. Baire'a jest istotnie większa niż rodzina zbiorów I-kat. Haara.

- U.B. Darji, *On Haar meager sets*, Topology Appl. 160 (2013), 2396-2400.

Twierdzenia typu Steinhausa-Pettisa-Piccard

Niech X będzie **polską grupą abelową**.

Twierdzenie 1 (1972, Christensen)

Jeśli $A \subset X$ jest uniwersalnie mierzalnym zbiorem niezerowym Haara, to $0 \in \operatorname{int}(A - A)$.

Twierdzenie 2 (2015, Jabłońska)

Jeśli $A \subset X$ jest zbiorem borelowskim II-kat. Haara, to $0 \in \operatorname{int}(A - A)$.

Wniosek 1 (1972, Christensen, 2015, Jabłońska)

W polskich grupach abelowych, które nie są lokalnie zwarte, każdy zbiór σ-zwarty jest zbiorem I-kat. Haara oraz zbiorem zerowym Haara.

- E. Jabłońska, *Some analogies between Haar meager sets and Haar null sets in abelian Polish groups*, J. Math. Anal. Appl. 421 (2015), 1479-1486.

Twierdzenie 3 (**2003, Matoušková & Zelený**)

W każdej polskiej grupie abelowej, która nie jest lokalnie zwarta, istnieją domknięte zbiory A, B niezerowe Haara, dla których $\mathrm{int}(A + B) = \emptyset$.

Twierdzenie 4 (**2015, Jabłońska**)

W każdej polskiej grupie abelowej, która nie jest lokalnie zwarta, istnieją domknięte zbiory A, B II-kat. Haara, dla których $\mathrm{int}(A + B) = \emptyset$.

- E. Matoušková, M. Zelený, *A note on intersections of non–Haar null sets*, Colloq. Math. 96 (2003), 1-4.

Tw. Fubiniego i Tw. Ulama-Kuratowskiego w polskich grupach abelowych, które nie są lokalnie zwarte

Przykład 1 (**2016, M. Doležal** & **M. Rmoutil** & **B. Vejnar** & **V. Vlasák**)

Zbiór

$$C := \{(s,t) \in \mathbb{Z}^\omega \times \mathbb{Z}^\omega : \ t_n \leqslant s_n \leqslant 0 \text{ dla } n \in \mathbb{N}\}$$

jest domknięty, niezerowy Haara i II-kat. Haara, w $\mathbb{Z}^\omega \times \mathbb{Z}^\omega$ oraz

$$C[t] := \{s \in \mathbb{Z}^\omega : \ (s,t) \in C\}$$

są zbiorami I-kat. Haara i zerowymi Haara w $\mathbb{Z}^\omega$ dla wszystkich $t \in \mathbb{Z}^\omega$.

Definicje zbioru zerowego Haara i zbioru I- kat. Haara nie są analogiczne!

Niech X będzie **polską grupą abelową** (już do końca referatu).

- Każdy zbiór zerowy Haara ma jeden parametr poświadczający – miarę testującą.
- Każdy zbiór I-kat. Haara ma dwa parametry poświadczające – przestrzeń metryczną zwartą + funkcję poświadczającą.

Proposition 1 (2016, Jabłońska)

Zbiór borelowski $B \subset X$ jest I-kat. Haara wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka ciągła funkcja $f : 2^\omega \to X$, że $f^{-1}(B + x)$ jest I-kat. w 2^ω dla każdego $x \in X$.

Każdy zbiór I-kat. Haara ma jeden parametr poświadczający – funkcję poświadczającą.

Zbiór parametrów poświadczających

Definicja 3 (**2004, Dodos**)

Niech $\mathcal{P}(X)$ będzie przestrzenią wszystkich probabilistycznych miar borelowskich na X; jest to przestrzeń polska z metryką Lévy'ego [1]. Dla dowolnego zbioru uniwersalnie mierzalnego $A \subset X$

$$T(A) := \{\mu \in \mathcal{P}(X) : \ \mu(x + A) = 0 \ \text{ dla } \ x \in X\}.$$

- P. Dodos, *Dichotomies of the set of test measures of a Haar null set*, Israel J. Math. 144 (2004), 15-28.
- P. Dodos, *On certain regularity properties of Haar-null sets*, Fund. Math. 181 (2004), 97-109.

[1] $\rho(\mu, \nu) := \inf\{\delta \geqslant 0 : \ \mu(A) \leqslant \nu(A_\delta) + \delta \ \text{ i } \ \nu(A) \leqslant \mu(A_\delta) + \delta\}$, gdzie $A_\delta := \{x \in X : d(x, A) \leqslant \delta\}$

Definicja 4 (**2016, Jabłońska**)

Niech $C(2^\omega, X)$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji ciągłych $f : 2^\omega \to X$; jest to przestrzeń polska z metryką supremum. Dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset X$

$$W(A) := \{f \in C(2^\omega, X) : \ f^{-1}(x+A) \text{ jest I-kat. Baire'a w } 2^\omega \text{ dla } x \in X\}.$$

- $T(A) \neq \emptyset$ dla zbioru zerowego Haara $A \subset X$.
- $W(A) \neq \emptyset$ dla zbioru I-kat. Haara w X.

Twierdzenie 5 (**2004, Dodos**)

Jeśli $A \subset X$ jest uniwersalnie mierzalnym zbiorem zerowym Haara, to:

- *$T(A)$ jest gęsty w $\mathcal{P}(X)$;*
- *jeśli $A \subset X$ jest zbiorem analitycznym, to albo $T(A)$ jest I-kat. Baire'a, albo $T(A)$ jest rezydualny w $P(X)$;*
- *jeśli A jest σ-zwarty, to $T(A)$ jest zbiorem rezydualnym w $\mathcal{P}(X)$.*

Twierdzenie 6 (**2016, Banakh & Jabłońska**)

Jeśli $A \subset X$ jest borelowskim zbiorem I-kat. Haara, to:

- *$W(A)$ jest gęsty w $C(2^\omega, X)$;*
- *albo $W(A)$ jest I-kat. Baire'a, albo $W(A)$ jest rezydualny w $C(2^\omega, X)$.*
- *jeśli A jest σ-zwarty, to $W(A)$ jest zbiorem rezydualnym w $C(2^\omega, X)$.*

Zbiory rezydualnie zerowe Haara i rezydualnie I-kat. Haara

Definicja 5 (**2004, Dodos**)

$A \subset X$ jest zbiorem *rezydualnie zerowym Haara*, jeśli $T(A)$ jest zbiorem rezydualnym w $\mathcal{P}(X)$.

Definicja 6 (**2016, Jabłońska**)

$A \subset X$ jest zbiorem *rezydualnie I-kat. Haara*, jeśli $W(A)$ jest zbiorem rezydualnym w $C(2^\omega, X)$.

/Wyniki wspólne z T. Banakhem, S. Głąbem, J. Swaczyną/

Twierdzenie 7 (**2009, Dodos**)

Jeśli $A \subset X$ jest zbiorem analitycznym, który nie jest rezydualnie zerowym Haara, to $A - A$ jest II-kat. Baire'a.

Twierdzenie 8 (**2016, BGJS**)

Jeśli A jest borelowskim zbiorem, który nie jest rezydualnie I-kat. Haara, to $A - A$ jest II-kat. Baire'a.

- P. Dodos, *The Steinhaus property and Haar-null sets*, Bull. Lond. Math. Soc. 41 (2009), 377–384.

Analogiczne definicje zbioru zerowego Haara a zbioru I-kat.Haara

Proposition 2 (**2016, Jabłońska**)

Niech $A \subset X$ będzie zbiorem borelowskim. Następujące warunki są równoważne:

(i) A jest zbiorem I-kat. Haara;

(ii) istnieje taka ciągła funkcja $f : 2^\omega \to X$, że zbiór $f^{-1}(A + x)$ jest I-kat. Baire'a w 2^ω dla $x \in X$.

Twierdzenie 9 (**2016, BGJS**)

Niech $A \subset X$ będzie zbiorem uniwersalnie mierzalnym. Następujące warunki są równoważne:

(i) A jest zbiorem zerowym Haara;

(ii) istnieje taka ciągła funkcja $f : 2^\omega \to X$, że $f^{-1}(A + x)$ jest zbiorem miary Haara zero w 2^ω dla każdego $x \in X$.

Definicja 7 (**2016, BGJS**)

Niech $C(2^\omega, X)$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji ciągłych $f : 2^\omega \to X$; jest to przestrzeń polska z metryką supremum. Dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset X$

$$WT(A) := \{f \in C(2^\omega, X) : \ f^{-1}(x{+}A) \text{ jest miary H-a zero w } 2^\omega \text{ dla } \ x \in X\}.$$

- $WT(A) \neq \emptyset$ dla zbioru zerowego Haara $A \subset X$.

Twierdzenie 10 (**2016, BGJS**)

Jeśli $A \subset X$ jest borelowskim zbiorem zerowym Haara, to:

- *$WT(A)$ jest gęsty w $C(2^\omega, X)$;*
- *albo $WT(A)$ jest I-kat. Baire'a, albo $WT(A)$ jest rezydualny w $C(2^\omega, X)$.*
- *jeśli A jest σ-zwarty, to $WT(A)$ jest zbiorem rezydualnym w $C(2^\omega, X)$.*

Definicja 8 (**2016, BGJS**)

$A \subset X$ jest zbiorem *BGJS-rezydualnie zerowym Haara*, jeśli $WT(A)$ jest zbiorem rezydualnym w $C(2^\omega, X)$.

Definicja Dodosa jest równoważna powyższej definicji!

Twierdzenie 11

Jeśli $A \subset X$ jest zbiorem borelowskim, to $WT(A)$ jest zbiorem rezydualnym w $C(2^\omega, X)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $T(A)$ jest zbiorem rezydualnym w $P(X)$.

Twierdzenie 12 (**2016, BGJS**)

Jeśli A jest borelowskim zbiorem, który nie jest BGJS-rezydualnie zerowy Haara, to $A - A$ jest II-kat. Baire'a.